This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY
of the Harvard College Library

This book is
FRAGILE
and circulates only with permission.
Please handle with care
and consult a staff member
before photocopying.

Thanks for your help in preserving
Harvard's library collections.

Digitized by Google

34-17
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES

AU POINT DE VUE DE L'APPLICATION

SUR

L'ÉTABLISSEMENT DES PONTS SUSPENDUS

DES PONTS EN MÉTAL, EN PIERRE, EN BOIS, ETC.

Digitized by Google

Paris. — Imprimé par E. THUNOT, rue Racine, 26.

Digitized by Google

CONSIDÉRATIONS THÉORIQUES

AU POINT DE VUE DE L'APPLICATION

SUR

L'ÉTABLISSEMENT DES PONTS SUSPENDUS

DES PONTS EN MÉTAL, EN PIERRE, EN BOIS, ETC.,

DES POITRAILS,

ARCS DE DÉCHARGE, FERMES, ET EN GÉNÉRAL DES SYSTÈMES ARTICULÉS

DESTINÉS A SUPPORTER DES CHARGES QUELCONQUES.

PAR

A. A. BOUDSOT.

PARIS.

CARILIAN-GŒURY ET Vve DALMONT, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, 49.

1853

Digitized by Google

PAGES.	LIGNES.	
45	Équation (68).	tang $\alpha = \ldots$. *lisez :* tang $\alpha_n = \ldots$.
46	Ligne 1.	trop de peine, seit pour.... *lisez :* trop de peine, soit pour....
47	Paragraphe [108]. . . .	*Lisez :* On portera donc sur une droite OA (fig. 16) des distances représentées par : $(2^2 - 2) = 2,\ (3^2 - 3) = 6 \ldots\ (7^2 - 7) = 42$; en ces différents points on mènera des perpendiculaires indéfinies à la droite OA; et sur la perpendiculaire élevée à la distance $(7^2 - 7) = 42$ on mesurera une longueur V, prise comme flèche du polygone supérieur.
51	Ligne 10.	.... comprises entre les obliques O $''_1$.... *lisez :* .... comprises entre les obliques OB$''_1$....
64	Équation (92).	*Lisez :* $\left(\frac{2\gamma V^2_n}{3H^4_n} + \frac{\Omega}{H^2_n}\right) h^3 = Bh^3.$
78	Trois dernières lignes de la note..	*Lisez :* alors la partie de la courbe a, m', n', d', c' se relèverait au-dessus de l'horizontale dans sa partie a d'une quantité égale à la différence des flèches des deux courbes a, m, n, d, c, et a, m_1, n_1, d_1, c, dont les longueurs alors resteraient les mêmes.
80	Ligne 1.	*Lisez :* en conservant ici à la composante horizontale Q la même valeur que, etc.
91	Ligne 9.	devie *lisez :* devient.
101	Équation (161).	*Lisez :* $\frac{\pi S}{Q} =$.
109	Au bas de la page.. . .	*Lisez :* Or si dans l'équation (61) on remplace $\frac{\pi}{Q}$ par $\frac{2f}{x^2}$, il vient :
114	Sixième ligne au bas. .	*Lisez :* l'équation (188) rapportée ci-dessous.
115	Troisième ligne de l'équation (192).	*Lisez :* $f^6 = \ldots$.
116	Ligne 7.	au lieu de partir de celui *lisez :* au lieu de partir de celle.
119	Ligne 13 en remontant.	*Le numéro de l'équation est :* (203).
126	Ligne 2.	*Lisez :* Mais ces trois groupes de poids étant exprimés....
133	Dernier terme de la troisième ligne, formule (227)..	*Lisez :* $+ \frac{b^2}{(lN)^6} l^6 n^6$.
149	Ligne 3.	*Lisez :* $p_1 = \frac{p'Q_1}{Q}$.
157	Dernière formule au bas de la page.	*Lisez :* $x = S \left\{ \ldots \right.$

Digitized by Google

AVANT-PROPOS.

Pour l'ingénieur chargé de satisfaire aux besoins matériels de la société, la théorie ne peut être qu'un *instrument* propre à lui fournir avec célérité et certitude les formes, les dimensions et toutes les autres conditions que doivent réaliser les travaux de l'industrie.

Plus l'instrument sera simple, plus l'usage en sera facile et général; plus il sera exact, plus l'œuvre à laquelle il sera appliqué pourra approcher de la perfection.

Mais il n'est pas toujours donné à une même méthode de remplir simultanément et rigoureusement ces deux conditions; il devient quelquefois nécessaire de sacrifier un peu de simplicité à plus d'exactitude, ou inversement; et le degré et le sens de la concession à faire à l'une de ces exigences sont déterminés par la nature du but que l'on a en vue.

On peut poser en principe que le degré de *simplicité* d'une méthode doit être en raison directe de la fréquence de son emploi, et que son degré *d'exactitude* doit être en raison directe de la valeur des données sur lesquelles elle s'appuie, et de l'importance des résultats qu'elle est appelée à fournir.

Digitized by Google

La prédominance de l'une ou de l'autre de ces deux conditions, dans une même question, détermine la part que chacune d'elles doit y prendre.

Relativement aux ponts suspendus, par exemple, la simplicité devra être sacrifiée à l'exactitude dans les méthodes propres à faire connaître la longueur d'une chaîne de suspension, non-seulement parce que la longueur de cet arc dépend de données relativement exactes, exemptes d'hypothèses, mais encore parce qu'une légère variation dans la longueur de l'arc en introduit une beaucoup plus considérable dans la flèche de cette chaîne, et par suite dans la courbure du plancher.

Il en sera de même, à un degré moindre cependant, pour ce qui a rapport aux tiges de suspension; attendu que les erreurs qui peuvent résulter de l'emploi des formules ou des méthodes expéditives, pour déterminer les longueurs des tiges de suspension, ne s'aggravent pas dans les déformations que ces erreurs peuvent causer à l'édifice. Ajoutons, en outre, que ces calculs devant se répéter autant de fois qu'il y a de tiges, il devient nécessaire de n'employer que des méthodes faciles et abrégées, afin d'éviter de fastidieux calculs et d'économiser le temps.

Si, au contraire, il s'agit de déterminer les sections des câbles, des tiges ou des poutrelles, il est permis de sacrifier un peu de l'exactitude des formules à la simplicité des calculs, parce que, non-seulement les efforts que supportent les sections sont très-variables accidentellement, mais encore parce que les valeurs des coefficients de résistance étant comprises dans de très-larges limites, il serait peu raisonnable de prétendre que les sections qui dépendent de ces coefficients dussent présenter un degré d'exactitude plus grand que ne comportent les données sur lesquelles elles s'appuient.

Digitized by Google

Le savant mémoire sur les ponts suspendus de Navier, l'illustre géomètre auquel la partie mécanique de l'art des constructions doit de si importantes théories, est certainement l'ouvrage le plus complet au point de vue scientifique, que l'on ait sur cette matière; et cependant, il faut le reconnaître, cet écrit n'est pas pour le praticien d'un usage proportionné à son mérite scientifique, précisément à cause de la forme exigée pour un travail de cette nature.

Les ouvrages qui ont été publiés depuis celui dont nous venons de parler sont, ou des mémoires relatifs à l'exécution de ponts spéciaux, ou des notes sur quelques points isolés de la théorie de l'équilibre des polygones. Mais malgré tous ces écrits, dont la plupart sont dus à des ingénieurs de premier mérite, le praticien ne sait aujourd'hui où trouver des règles pratiques, directes, pour se guider dans la plupart des cas que présente journellement l'établissement des ponts suspendus.

Tels sont, entre autres, les cas suivants :

1° Celui où les tiges sont également espacées sur la chaîne; comme dans les ponts dont le plancher est fixé à des chaînes formées d'anneaux en fer forgé;

2° Celui des ponts à chaînes en dessous (figure c'_1 et d'_1), où les chaînes de suspension sont remplacées par des verges qui, travaillant par *compression*, n'offrent plus des poids dont la loi de répartition puisse être assimilée à celle des poids des tiges qui travaillent par *extension*, et pour lesquelles les formules usuelles ont été établies;

3° Enfin le cas où les charges accidentelles et permanentes, non-seulement ne suivent pas les lois admises dans les formules usuelles connues, mais même n'admettent aucune loi susceptible d'être exprimée mathématiquement.

Digitized by Google

Ainsi, aujourd'hui, malgré ces nombreuses publications, presque tous les constructeurs de ponts suspendus déterminent les longueurs des tiges de suspension pour une forme de câble supposée parabolique, parce que cette forme est, de toutes celles qui s'approchent plus ou moins de la courbe réelle des chaînes, celle qui présente les moins grandes difficultés de calcul.

Cette hypothèse de la forme parabolique des câbles revient à ne tenir compte ni de l'action réelle des poids dus aux câbles et aux tiges de suspension dans les ponts à chaînes en dessus, ni de l'influence des chaînes et des fermettes ou des tasseaux dans les ponts à chaînes en dessous. Or, dans les ponts du dernier système surtout, l'action des poids dont on ne tient pas compte est souvent assez considérable pour modifier d'une manière très-sensible la courbure du plancher du pont.

Quand les constructions sont importantes, et que ces changements peuvent altérer la forme ou la stabilité de l'édifice, les constructeurs règlent, pendant la pose, et par tâtonnements, les longueurs des tiges de suspension : mais, dans cette opération, l'ouvrier n'ayant d'autre guide que le sentiment peut commettre de graves erreurs, et les travaux que nous avons dirigés nous ont fait reconnaître qu'il est extrêmement difficile, pour ne pas dire impossible, d'arriver à un bon résultat si l'on ne suit d'autre règle que celle-là. Aussi n'est-il pas rare de voir, dans plusieurs ponts existants, des tiges de suspension qui présentent des différences de tension souvent très-considérables, dues uniquement à ce que le câble, qui tend à reprendre de lui-même la forme d'équilibre qu'on ne lui a pas donnée pendant la pose, agit inégalement sur les tiges suivant que les longueurs de celles-ci s'approchent plus ou moins des longueurs des tiges qui correspondent à la courbe réelle d'équilibre.

Digitized by Google

Si, dans cet état du pont, un fardeau, circulant sur les planchers, atteint le point correspondant à l'une des tiges les plus tendues, il augmente la tension des tiges voisines de celle-ci, et il peut arriver que cette tension qui, par hypothèse, était déjà plus forte qu'elle ne devait être, dépasse la résistance que cette tige peut opposer. Si, au contraire, le fardeau agit sur une tige moins tendue que les tiges voisines, il peut en résulter une déformation du plancher capable de compromettre la solidité de la charpente.

D'autres constructeurs prennent le parti de faire établir, à une échelle convenable, un modèle en petit du système de suspension d'après lequel ils règlent les dimensions de l'appareil en grand.

Le premier mode, qui, tout en exigeant beaucoup de main-d'œuvre, ne permet jamais d'obtenir un résultat satisfaisant, est vicieux ; le second, qui nécessite un assez grand emplacement et beaucoup de soins pour être appliqué convenablement, est fort coûteux et prend beaucoup de temps.

Cependant ces deux procédés, qui font sourire le théoricien, sont employés concurremment dans la pratique.

La raison en est que, pour l'ingénieur constructeur qui doit embrasser à la fois mille sujets divers d'art et d'administration, une contention d'esprit trop soutenue dans l'intérêt exclusif d'une question d'art ou de science est un sacrifice impossible.

Il ne faut pas oublier que le praticien n'a que de courts instants à donner à la partie spéculative de la science, et que, le plus souvent, c'est ou dans le cabinet, au milieu des questions d'intérêt ou d'administration, ou sur le chantier, parmi le tumulte et le bruit des ouvriers et des machines, qu'il doit répondre aux nombreuses questions que soulève l'exécution d'une entreprise considérable.

Digitized by Google

Nous pensons, en outre, que pour que la science entre effectivement dans les applications, il faut qu'elle soit abordable, sinon dans les méthodes scientifiques, du moins dans ses déductions finales, à tous les constructeurs; même à cette classe nombreuse et utile d'hommes d'exécution que les exigences de la vie active des ateliers rendent étrangers aux travaux de cabinet.

Nous savons aussi, pour l'avoir éprouvé, que dans maintes circonstances le temps manque au directeur d'un travail pour qu'il détermine lui-même les dimensions et les formes nécessaires à la bonne exécution d'un ouvrage d'art.

L'ingénieur est alors dans la nécessité ou d'abandonner les méthodes rationnelles pour suivre la routine ordinaire, ou de s'en rapporter aux résultats chanceux des opérations d'un employé peu exercé aux interprétations et aux conversions numériques des symboles algébriques.

On peut donc dire que ce qui manque aujourd'hui à l'application, c'est un ouvrage pratique, une espèce de manuel qui permette à l'ingénieur ou de déduire rapidement lui-même les principaux éléments d'un projet de pont suspendu, ou d'en faire exécuter les calculs et les tracés soit par ses employés, soit par ceux des entrepreneurs chargés de l'exécution.

Comme preuve à l'appui de ce que nous venons d'exposer, et pour faire voir que ce n'est pas une opinion personnelle basée sur des faits isolés, nous ferons observer que dans tous les mémoires publiés depuis 1823 sur la théorie des ponts suspendus, nous voyons se reproduire cette idée : qu'il faut « simplifier la théorie des ponts suspendus » dans sa partie la plus indispensable, et lui donner la forme qui convient » le mieux à son application spéciale et directe aux travaux. »

Digitized by Google

Le besoin auquel répond cette idée, nous l'avons éprouvé nous-même, comme tous les ingénieurs qui ont eu à construire des ponts suspendus; et c'est pour y satisfaire que nous avons rédigé ces notes, qui ont été écrites en partie sur le chantier, au fur et à mesure que la nécessité s'en faisait sentir.

Les formules, les épures et les méthodes de calculs que nous présentons ici ont donc été éprouvées par nous en grande partie, et elles ont, en outre, reçu la sanction de l'expérience dans les travaux où elles ont été appliquées, depuis quatorze ans environ, par plusieurs ingénieurs auxquels nous les avons communiquées, ou qui en ont eu indirectement connaissance. Quelques-unes de ces méthodes ont même été exposées, par nous, il y a une douzaine d'années, soit dans un journal spécial, soit dans des cours publics. C'est donc avec une certaine confiance dans leur valeur pratique que nous les publions aujourd'hui.

Digitized by Google

Digitized by Google

INTRODUCTION.

Les combinaisons des pièces rigides ou flexibles affectant une forme polygonale, jouent un très-grand rôle dans les constructions.

Dans la plupart des cas, en effet, où il s'agit de neutraliser l'action de forces telles que le poids des matériaux, la pression des fluides, la poussée des terres, etc., il arrive que la rigidité des pièces n'est plus suffisante, et que le constructeur est forcé de recourir à des combinaisons de verges rigides ou flexibles disposées suivant une figure polygonale qui repose, par quelques-unes de ses parties seulement, sur des points d'appui donnés.

Les fermes des maisons et les cintres des ponts en bois et en métal, les chaînes des ponts suspendus, les poitrails de maisons, les arcs de décharge, les poutres armées, quelques barrages, plusieurs vannages d'usines, offrent de nombreux exemples et souvent d'heureuses applications des règles que fournit la théorie des polygones articulés.

Déterminer la *forme* qui convient à l'équilibre d'un polygone chargé de poids, les *longueurs* et les *inclinaisons* des divers côtés de ce polygone, ainsi que les *efforts* de *compression* et *d'extension* auxquels les différents

Digitized by Google

éléments sont soumis, tels sont les problèmes que le constructeur a constamment à résoudre, telles sont aussi les questions qui font l'objet du présent mémoire.

Nous nous sommes efforcés de mettre en relief, dans toutes nos opérations, les données primitives du problème telles qu'elles se présentent dans les applications, c'est-à-dire les *poids* qui agissent sur le polygone, *les longueurs* ou les *projections horizontales* des côtés et les *indices* de ces mêmes *côtés* ou ceux des *angles* du polygone.

Pour traiter ces différentes questions, nous avons préféré résoudre directement le problème que de le dénaturer par des considérations théoriques au moyen desquelles on eût pu y appliquer, à l'aide de théorèmes connus par des études antérieures, certains principes qui eussent avancé le point de départ. En rejetant ainsi l'emploi de ces règles qui ne sont que des corollaires souvent très-éloignés des vérités premières dont l'esprit reprend difficilement la route, nous avons voulu rendre nos démonstrations plus claires et surtout plus évidentes. Nous pensons qu'une formule qui dérive directement d'une vérité incontestable et prochaine laisse dans l'esprit du lecteur une confiance plus grande en même temps que la règle qu'elle représente est plus exactement et plus facilement appliquée aux différents cas de la pratique qu'elle est appelée à régir.

Pour des raisons analogues, toutes les fois que nous avons dû recourir à l'emploi des méthodes analytiques, nous avons employé le calcul des *différences finies* de préférence au calcul des *infiniment petits*, parce que, par la nature même de son objet, le calcul des différences qui n'admet que des quantités finies, qui peuvent pour ainsi dire tomber sous nos sens, nous paraît devoir mieux s'adapter que le second à la

Digitized by Google

tournure d'esprit et aux procédés intellectuels du praticien dont l'activité s'exerce continuellement sur des objets sensibles.

Comme nous l'avons remarqué depuis longtemps, tant au sujet des travaux que nous avons dirigés qu'à l'occasion des cours d'application dont nous avons été chargés, les hommes d'action sont beaucoup mieux disposés à admettre et à retenir les conséquences qu'ils déduisent des rapports établis entre des quantités finies, tangibles, telles que les quantités linéaires par exemple, qu'à recevoir la lumière qui leur arrive à la suite de combinaisons effectuées sur des quantités infiniment petites, abstraites, que l'esprit n'entrevoit qu'à travers des considérations métaphysiques assez subtiles auxquelles les habitudes de la vie pratique donnent peu d'aptitude.

Enfin quand les résultats de nos calculs nous ont paru trop compliqués pour la pratique, nous avons cherché à les simplifier en les réduisant soit, en nous appuyant sur des considérations nouvelles, soit en supprimant ou en modifiant quelques-uns de leurs termes qu'une discussion de la formule générale, étendue aux limites ordinaires des applications, nous faisait reconnaître comme étant sans importance pratique.

Ces feuilles étant écrites non-seulement pour les ingénieurs qui projettent et dirigent des travaux, mais encore pour les conducteurs et les chefs d'ateliers qui les exécutent, nous avons dû choisir, parmi toutes les solutions qui se présentaient à notre esprit, non pas seulement celles qui sont les plus simples, les plus claires, mais encore les plus facilement applicables sur le chantier : aussi, après avoir donné l'*expression algébrique*, nous avons ajouté la *traduction linéaire* de cette expression, de sorte que chaque *forme* a sa *formule* et réciproquement, mais formes et formules accessibles à tous les constructeurs, applicables sur tous les

Digitized by Google

chantiers, pouvant se suppléer, de sorte, qu'au besoin, l'une quelconque des deux méthodes sert de flambeau ou de contrôle à l'autre.

L'ouvrage comprend trois parties.

La première partie renferme l'étude, sous le double rapport de la *forme* et de la *formule*, de toutes les circonstances que peut offrir l'établissement des polygones articulés, et, comme cas particulier, une théorie des ponts suspendus appliquée aux formes et aux dispositions que comporte ce genre de constructions.

La deuxième partie renferme, sous forme d'aide-mémoire, toutes les formules, toutes les constructions graphiques, toutes les méthodes de calcul qui se rapportent à l'établissement des ponts suspendus, avec quelques instructions pratiques sur leur usage. Cette seconde partie est terminée par des tableaux destinés à faciliter aux ingénieurs les calculs des différents éléments des polygones articulés.

Enfin, dans la troisième partie, se trouvent, sous forme de notes, des développements qui, quoique n'étant pas absolument indispensables à l'intelligence de la première partie, servent cependant à éclaircir quelques points de la théorie des polygones.

Dans ces trois divisions, nous avons fait une très-large part aux ponts suspendus, qui ne sont que des cas particuliers, mais très-importants, des polygones articulés.

Nous avons surtout examiné les cinq cas suivants, qui comprennent à peu près tous les genres de ponts :

1° Le cas où toute la charge est uniformément répartie sur le plancher, dans le cas des chaînes en dessus ;

2° Celui où, indépendamment de l'action du plancher, les câbles et les

Digitized by Google

tiges agissent par la *répartition réelle* de leurs poids sur la forme d'équilibre des chaînes ;

3° Celui où le poids total est uniformément réparti sur la chaîne de suspension ;

4° Celui où, les câbles supportant une charge uniformément répartie, le plancher et les tiges modifient, par la répartition de leurs poids, la courbe d'équilibre ;

5° Enfin celui où les poids qui agissent sur le polygone étant quelconques ne sont point assujettis à être l'expression d'une loi mathématique.

Le calcul des tiges de suspension, même dans le cas très-simple d'un câble parabolique, était long et fastidieux ; nous l'avons remplacé par un calcul graphique extrêmement simple qui fait connaître immédiatement la longueur réelle des tiges de suspension. Cette épure qui se réduit à un triangle interceptant entre deux de ses côtés adjacents, des lignes parallèles proportionnelles ou égales aux longueurs cherchées des tiges de suspension, suivant l'échelle adoptée, peut s'établir ou sur l'aire d'une chambre ou sur trois files de règles situées dans un même plan comme nous l'indiquerons en son lieu.

Si la construction était assez importante pour que l'on crût devoir tenir compte du poids des tiges et des chaînes dans le calcul des longueurs des tiges de suspension, il faudrait retrancher des premières tiges, correspondantes au câble supposé parabolique, les ordonnées d'une courbe connue des ingénieurs sous le nom de *courbe des différences des ordonnées*, pour obtenir la longueur des tiges de suspension de la courbe réelle d'équilibre des chaînes. Nous avons substitué au calcul de l'équation des ordonnées de cette courbe, qui renferme la variable à la quatrième puissance, deux méthodes graphiques dont l'une fait connaître d'abord

Digitized by Google

immédiatement le point *maximum*, le point *d'inflexion* et la *tangente* en ce point d'inflexion, et ensuite les ordonnées de cette courbe des différences.

A l'exemple de deux ingénieurs (*) qui ont pris, dans le tracé fort simple du parallélogramme des forces, le principe du tracé sous une forme éminemment pratique, de deux cas particuliers des ponts suspendus, nous avons donné l'épure des principaux éléments d'un polygone, soumis à des poids, dans le cas le plus général. Épure qui permet de déterminer à une très-grande échelle la longueur et les tensions des côtés ainsi que les accroissements des ordonnées successives des sommets de ce même polygone.

Quand cette épure est insuffisante et qu'il est nécessaire d'obtenir directement les longueurs totales des tiges de suspension au lieu de les composer de leurs accroissements successifs que fournit l'épure ci-dessus, il faut employer la méthode graphique dont nous avons parlé plus haut en l'appliquant à chacun des termes du second membre de l'équation des ordonnées cherchées. Comme on le verra dans la suite, ce

(*) Un livre qui traite d'une science qui a déjà été l'objet de nombreux écrits de la part d'hommes du plus haut mérite, ne peut prétendre à l'originalité dans toutes ses parties, surtout quand l'auteur du livre n'a eu en vue que d'être utile. Nous donnons ci-dessous les noms des ingénieurs dont les écrits nous ont servi de guide ou de moyens de vérification dans quelques points de notre théorie.

M. Alphonse Bodson de Noirfontaine, capitaine de génie, auteur d'un Mémoire sur les ponts de cordage construits à Metz en 1827, a donné une construction graphique fort simple des éléments du polygone parabolique en fonction des charges. Plus tard, M. Jullien, ingénieur des ponts et chaussées, a établi, au moyen de considérations fort ingénieuses, une théorie du polygone parabolique, déduite des propriétés mécaniques de ces lignes. Peu de temps après, M. Desjardins, également ingénieur des ponts et chaussées, a commencé, sur la simplification des formules applicables aux ponts suspendus, un Mémoire qu'il se proposait de compléter, quand une mort prématurée enleva cet estimable ingénieur à ses travaux.

Digitized by Google

calcul graphique se réduit toujours, quel que soit le degré de l'équation, au tracé le plus simple et le plus exact : celui de deux droites inclinées l'une sur l'autre qui comprennent entre elles des portions de parallèles dont les distances à un même point ne dépendent que du numéro de la tige et de l'exposant de ce numéro dans l'équation de l'ordonnée.

Les valeurs de ces exposants étant très-limitées dans nos formules, et le nombre des tiges d'un pont suspendu dépassant rarement deux cents, dans les applications, il nous a été possible de dresser d'avance des tableaux qui renferment les écartements relatifs des parallèles sur lesquelles l'épure fournit les longueurs cherchées des tiges de suspension.

Ces tableaux peuvent être remplacés, même avec avantage, par des épures qui se composeraient de parallèles conduites à des distances proportionnelles aux quantités qui sont consignées dans nos tableaux : ces lignes, tracées une fois pour toutes, serviront à établir les épures entières de tous les ponts suspendus dont on aura à s'occuper; pour cela il suffira de calculer seulement, pour chaque cas particulier, les inclinaisons des deux obliques qui doivent comprendre entre elles les portions de parallèles proportionnelles aux longueurs cherchées.

Comme nous avons déjà eu occasion de le dire plus haut, ces feuilles renferment la solution de la forme d'équilibre statique des polygones à côtés égaux, en tenant compte du poids variable de l'appareil.

Une solution pratique de ce cas, non plus que les modifications à faire subir aux formules connues, quand les chaînes sont placées au-dessous du plancher du pont, n'étant indiquées nulle part, que nous sachions, du moins, nous avons traité ces différents cas avec quelques développements.

Digitized by Google

Dans presque tous les ponts à chaînes en dessous, la charge, dont la plus grande partie est due aux fermettes sur lesquelles repose le tablier du pont, est trop irrégulière pour qu'on puisse la formuler algébriquement dans les équations propres à établir une méthode de calcul pratique. Il en est de même, à un degré moindre cependant, dans quelques ponts à chaînes en dessus, soit par suite du défaut d'homogénéité dans les matériaux, soit par suite d'une disposition architecturale particulière des différentes parties du pont.

Pour ces différents cas il fallait faire péniblement le calcul de proche en proche, par voie d'essai et de tâtonnements; encore ces calculs d'essai, pour lesquels il n'y avait pas de méthode générale, devaient-ils être confiés, crainte d'erreur grossière, à des personnes versées dans la mécanique.

Pour remplir cette lacune, nous avons indiqué une méthode de calcul très-simple pour ce cas compliqué, et qui se déduit tout naturellement des considérations théoriques développées dans cet écrit.

L'aide-mémoire qui forme la deuxième partie, est une exposition concise des *résultats* strictement nécessaires à la pratique, avec quelques détails sur la manière de les appliquer, et des tableaux qui facilitent l'emploi des formules et l'usage des méthodes graphiques.

Cet aide-mémoire nous a paru utile pour épargner à l'ingénieur le temps qu'il lui aurait fallu pour extraire lui-même du livre des principes les formules nécessaires à ses travaux.

Mais il arrive souvent que, dans certains moments où l'esprit n'est plus entravé par mille questions de détails, l'ingénieur désire remonter à la source des formules dont il fait usage, soit pour s'assurer que les hypo-

Digitized by Google

thèses sur lesquelles ces formules s'appuient peuvent s'étendre au cas qui l'occupe, soit pour vérifier si les données pratiques, les coefficients d'expérience que renferme chacune des expressions algébriques dont il a besoin, peuvent exprimer aussi la loi du fait nouveau dont il cherche la mesure, soit enfin pour connaître quel degré de confiance il peut accorder aux résultats que lui fournit la théorie. Dans de semblables circonstances, il importe de pouvoir remonter jusqu'à la source des raisonnements qui ont fourni le résultat final dont on se propose de faire usage.

Le seul moyen de satisfaire à cette double exigence d'offrir immédiatement, sans recherches pénibles, sans perte de temps et sans chance d'erreur, les résultats nécessaires au praticien, tout en permettant, au besoin, à ce dernier, de reprendre quand bon lui semble, et sans difficultés, la route des raisonnements qui ont fourni ces résultats, c'est évidemment de faire suivre chaque ouvrage théorique d'un résumé des parties strictement nécessaires au praticien, c'est-à-dire de placer l'aide-mémoire à la suite du livre des principes, en accompagnant chaque formule ou chaque règle inscrite à cet aide-mémoire d'un indice qui renvoie à la partie théorique qu'il faut consulter.

Une exposition de la théorie et un résumé des conclusions indispensables à la pratique, telle est la double forme sous laquelle nous concevons tous les ouvrages destinés aux hommes d'application.

Nous terminerons en priant M. H. Renaud de recevoir ici les témoignages publics de notre reconnaissance pour le concours éclairé qu'il a bien voulu nous prêter pendant l'impression du présent mémoire.

Le Caire (Égypte), mai 1851.

Digitized by Google

Digitized by Google

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE

DES

POLYGONES FUNICULAIRES

CHARGÉS DE POIDS QUELCONQUES

DISTRIBUÉS D'UNE MANIÈRE ARBITRAIRE SUR LEUR LONGUEUR.

CHAPITRE Ier.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

SECTION 1re. — Mode d'action des matériaux dans les constructions.

[1] Pour soutenir un poids P situé *au-dessus* d'un point fixe A (fig. *a*), on place, entre ce point fixe et le poids donné, une *verge rigide* AB qui transmet au point fixe l'action du poids.

[2] Si, au contraire, le poids P′ est placé *au-dessous* du point fixe A′ (fig. a_1), on soutient ce poids P′ au moyen d'un *cordon* A′B′ attaché en A′.

[3] Si, dans les deux cas ci-dessus, les deux poids sont égaux, c'est-à-dire si P = P′, la *verge* et le *cordon* sont sollicités par deux forces égales entre elles, mais de directions contraires. Ainsi (fig. *a*) la verge AB est *contractée*, tandis que le cordon A′B′ (fig. a_1) est *dilaté*.

[4] Quand les poids à soutenir sont placés dans un intervalle AB (fig. *b*

Digitized by Google

et b_1) où il n'est plus permis de prendre de point d'appui, et qui est en même temps trop considérable pour que la rigidité des pièces de bois ou de fonte puisse suffire, alors on reporte l'action des poids donnés sur les points fixes A et B des rives; soit au moyen d'arcs-boutants AC, CB (fig. *b*), soit au moyen de cordons AC, CB (fig. b_1).

Dans le premier cas, *l'effort* du poids P tend à *écarter* les culées l'une de l'autre, dans le deuxième cas il tend à les *rapprocher*.

[5] Pour que des poids supportés par des pièces rigides inclinées n'agissent que dans le sens de la longueur de ces pièces soit en les *comprimant*, soit en les *allongeant*, il faut qu'il y ait autant de sommets que de poids à supporter; d'où il résulte que plus les poids sont nombreux, plus les sommets et par conséquent les côtés du polygone augmentent en nombre : l'on obtient alors les dispositions représentées par les (fig. *c* et c_1).

[6] Si enfin les poids sont infiniment rapprochés et distribués suivant une certaine loi de continuité, alors les côtés du polygone deviennent infiniment petits, leur nombre infiniment grand, et au lieu d'une ligne brisée, on obtient une courbe dont la courbure est déterminée en chaque point par la répartition des poids que supporte l'arc.

Suivant que les éléments de la courbe sont sollicités par des forces qui tendent à *rapprocher* ou à *écarter* les molécules les unes des autres, les arcs tournent leur *convexité* vers le *haut* ou vers le *bas* (fig. *d* et d_1).

Si les arcs ACB, ACB (fig. *d* et d_1) ont même longueur et même corde, et si, de plus, les poids étant égaux sont aussi semblablement répartis sur les deux arcs, les courbes sont symétriques et les forces qui sollicitent leurs éléments sont de signes contraires.

[7] Un pont n'étant autre chose qu'un plancher établi sur un espace donné au moyen de points d'appui artificiels résultant de forces obliques, lesquelles réagissent sur des points fixes pris en dehors de l'espace à franchir, tels que les culées ou les piliers, il s'ensuit que les dispositions précédentes qui réalisent ces conditions au moyen des deux modes d'action élémentaires

Digitized by Google

des matériaux, renferment les principes d'établissement de tous les ponts possibles dont les modèles les plus parfaits ne sont que des applications les plus heureuses.

Sect. 2. — Formes élémentaires des ponts.

[8] Les dispositions élémentaires représentées par les fig. b,c,d — b_1,c_1,d_1 ne peuvent être employées seules dans les constructions importantes, parce que le plus souvent elles ne permettent pas de réaliser simultanément deux conditions nécessaires, la pente et la tension minima : ces deux éléments variant en sens inverse l'un de l'autre. Aussi dans les édifices importants, la courbe ou le polygone n'ont-ils d'autre objet que d'offrir une série de points d'appui artificiels aux pièces qui supportent directement le plancher, dont la forme alors, devenant indépendante de la courbure, peut être rendue la plus avantageuse à la circulation. On obtient dans ce cas les dispositions représentées par les fig. $b'c'd'e'f'$ — $b_1'c_1'd_1'e_1'f_1'$.

[9] Dans les systèmes que représentent les fig. $b'c'd'$ le plancher est relié aux sommets des polygones, ou aux différents points des arcs au moyen de tiges de suspension qui agissent, en se *dilatant*, sur des pièces polygonales ou courbes *qui doivent être rigides* et dont les molécules sont soumises à des efforts de *compression*. Dans la fig. e le système complet est compressible : c'est-à-dire les tasseaux qui supportent directement le plancher ainsi que l'arc ou le polygone qui reçoit les tasseaux.

Les fig. f, f_1, f', f_1' qui présentent aussi l'application d'arcs *rigides* et *compressibles* indiquent l'emploi simultané de tasseaux et de tiges de suspension.

[10] Dans les fig. b_1', c_1', d_1', au contraire, le plancher repose, au moyen de *tasseaux compressibles*, sur des *arcs* ou des *polygones extensibles*. La fig. e_1 fait exception à cette règle et elle présente l'exemple d'arc ou de polygone extensible soutenant un plancher *suspendu* au moyen de tiges qui peuvent être *flexibles*.

Digitized by Google

Dans les fig. e_1', f_1' le plancher est suspendu à des arcs *flexibles* et *extensibles* au moyen de tiges et de tasseaux qui travaillent par extension et par compression.

Sect. 3. — Objet des ponts. Considérations auxquelles il faut avoir égard dans l'établissement d'un projet.

[11] Les ponts, par cela seul qu'ils doivent servir au passage des fardeaux dont le poids est très-variable, ne sont pas susceptibles, ni dans leur forme ni dans les dimensions de leurs pièces, d'une limite inférieure d'équilibre correspondant au maximum de la charge à supporter, supposée uniformément répartie : ils doivent, surtout, être capables de résister à des forces souvent très-considérables, produites, soit par le déplacement rapide des fardeaux, soit par l'accumulation de charges accidentelles énormes sur un seul point.

[12] De là la nécessité, après avoir déterminé la forme correspondante à la plus grande charge que l'édifice aura à supporter, de s'assurer par une nouvelle série de calculs que les mouvements et les déplacements possibles des charges accidentelles n'altéreront pas sans retour, ni même d'une manière sensible, la forme des combinaisons premières.

[13] Si ce dernier examen apprenait qu'une ou plusieurs pièces fussent trop faibles, il serait indispensable d'en accroître la résistance, soit en augmentant leur équarrissage, soit en les reliant, au moyen de pièces secondaires, à quelques-unes des pièces principales du système, dans les points où cette nouvelle force de liaison ne pourrait nuire.

[14] Dans tous les cas, on conçoit combien il est important de rendre tous les points de l'appareil solidaires entre eux, conditions faciles à remplir au moyen de pièces disposées de manière à rendre toute déformation incompatible avec la forme géométrique du système.

[15] Cette condition, qu'il est essentiel de réaliser dans les ponts dont les courbes tournent leur *convexité* vers le haut, perd un peu de son impor-

Digitized by Google

tance dans ceux à courbe *concave* vers le haut, où l'équilibre se rétablit de lui-même quand la cause qui l'a troublé a disparu.

Sect. 4. — Classification des ponts, basée sur le mode d'action des matériaux qui les composent.

[16] Si, ne considérant les ponts que sous le rapport des efforts statiques qu'ils ont à supporter, on voulait les classer d'après la nature des efforts auxquels sont soumises les pièces maîtresses qui composent l'appareil sur lequel repose le plancher, on pourrait établir autant de genres qu'il y a de modes de résistance des matériaux ; l'on aurait alors :

[17] 1° *Les ponts compressibles* (fig. e, f — b', c', d', e', f'). C'est-à-dire ceux dont toutes les pièces composant le *support principal* ont à résister à des efforts qui tendent à *rapprocher* les molécules les unes des autres ;

[18] 2° *Les ponts extensibles* (fig. $e_1 f_1$ — $b_1' c_1' d_1' e_1' f_1'$). C'est-à-dire ceux dans lesquels toutes les pièces de l'appareil principal sont soumises à des efforts qui tendent à *éloigner* les molécules les unes des autres ;

[19] 3° Les *sous-genres* ou *genres mixtes* comprendraient enfin ceux où l'appareil principal serait composé de pièces dont les unes seraient soumises à des forces de distension et les autres à des efforts de contraction.

On aurait alors un genre mixte comprenant deux espèces : les *ponts compressibles extensibles* et les *ponts extensibles compressibles*, en rappelant en première ligne les fonctions de la pièce qui jouerait le rôle principal, et en seconde ligne le mode d'action des pièces qui n'auraient qu'un rôle secondaire.

Ce genre mixte embrasserait alors tous les ponts représentés par les figures g, h, i, k que nous donnons ici simplement comme exemples des combinaisons possibles des formes primitives sans nous occuper de leur valeur pratique relative.

[20] Comme on le voit facilement, ce genre mixte comprend implici-

Digitized by Google

tement les ponts rigides, c'est-à-dire ceux qui n'exercent que des efforts verticaux sur les culées : la rigidité étant un mode de résistance composé des deux résistances simples et offrant, dans une même pièce, des exemples de molécules qui résistent à la compression, tandis que d'autres au contraire sont soumises à des forces d'extension.

[21] Dans les appareils polygonaux ou courbes qui supportent le poids du plancher d'un pont, il est toujours possible, par l'addition de nouvelles forces de liaison, de neutraliser l'effet des composantes horizontales des tensions que développent les poids qui agissent sur le système.

Si en effet aux points A et B (fig. *d'*, d_1') par lesquels les arcs reposent sur les culées, on détruit l'effet des composantes horizontales des tensions sur les culées, soit au moyen d'une corde AB (fig. *d'*) travaillant par extension pour s'opposer aux *poussées* de l'arc ACB ; soit au moyen d'une poutre rigide AB (fig. d_1') destinée à détruire l'effet du *tirage* de l'arc ACB, il ne subsistera plus, des forces extérieures appliquées au système, que les composantes verticales des tensions, dont la somme sera égale à celle des poids donnés augmentée du poids du système. Dès lors, les culées qui, dans le cas où les tensions des arcs sont libres, doivent être capables de résister soit à la *poussée* vers les terres, dans le cas d'un arc *rigide*, soit à un *tirage* en rivière, dans le cas d'un arc *flexible*, n'auront plus qu'à supporter une simple pression *verticale* et leur rôle se réduira à celui de simples points d'appui.

[22] Dans d'autres constructions analogues aux ponts en treillis de M. Town, ingénieur américain, par exemple, il est difficile de déterminer, *à priori*, le rôle de chaque pièce, à cause des circonstances variées qui peuvent se produire dans l'ensemble par suite du jeu des assemblages ; et, sauf les longrines supérieures et inférieures dont l'action peut, jusqu'à un certain point, être assimilée à celle des fibres supérieures et inférieures d'un solide, on peut dire que la résistance d'une ferme en treillis ne peut être soumise à l'analyse et que c'est l'expérience qu'il faut interroger pour connaître l'effort quelle peut opposer à des charges données.

Digitized by Google

[23] Tout ce que nous venons de dire ne pourra donc s'appliquer qu'aux constructions où le rôle de chacune des pièces sera parfaitement déterminé, comme dans les dispositions que représentent les figures jointes à ce mémoire, et qui comprennent d'ailleurs à peu près le plus grand nombre de constructions possibles, telles que les ponts fixes à arcs solides, en bois ou en métal; les ponts suspendus; les poutres armées; les poitrails et tous les appareils, en général, qu'emploient les constructeurs pour supporter des charges données.

[24] Résumant donc tout ce que nous venons de voir, nous dirons que, pour l'ingénieur qui ne considère les ponts que sous le rapport du genre d'efforts que supportent les pièces maîtresses et de l'action que les forces exercent sur les points d'appui, on peut établir les divisions suivantes :

Première classe. *Ponts compressibles.* C'est-à-dire les ponts où toutes les pièces de l'appareil qui supporte le plancher résistent à des efforts qui en compriment les molécules, et où l'appareil lui-même tend à éloigner les culées l'une de l'autre (fig. *bcdef — b'c'd'e'f'*).

Deuxième classe. *Ponts extensibles.* C'est-à-dire les ponts dans lesquels toutes les pièces qui composent l'appareil principal, supportant le plancher, tendent à se rompre par l'écartement de leurs molécules en cherchant à rapprocher les culées l'une vers l'autre (fig. $b_1c_1d_1e_1f_1 — b_1'c_1'd_1'e_1'f_1'$).

Troisième classe. *Ponts mixtes.* Les ponts qui résultent de la combinaison des deux premières classes et qui, par conséquent, présentent les effets simultanés des ponts extensibles et des ponts compressibles (fig. *g*, *h*, *i*, *k*).

Cette dernière classe comprend évidemment les ponts rigides à systèmes composés, c'est-à-dire ceux qui étant conformes à la définition que nous avons admise pour les ponts mixtes, à double appareil compressible et extensible, offrent des combinaisons telles, que les effets des résultantes horizontales sont nuls sur les points d'appui des culées. Leurs dispositions seraient alors analogues à celles des figures $b'c'd' — b_1'c_1'd_1' — g$.

Les espèces, les familles de chaque genre, pourront ensuite s'établir

Digitized by Google

suivant les analogies de formes et d'après la nature des matériaux employés.

[25] Quant aux méthodes de calcul propres à déterminer les conditions d'équilibre statique des arcs ou des polygones dans les différents systèmes, elles se réduisent toutes à une seule, en ayant soin de supposer la résistance des pièces tantôt attractive, tantôt répulsive, suivant que celles-ci devront être dilatées ou comprimées.

[26] Tout ce que nous venons d'établir pour les arcs concaves pourra donc s'appliquer aux arcs convexes en supposant aux tensions, dans ce dernier cas, une direction opposée à celle qu'elles avaient dans le premier; ou, si l'on veut, en opérant pour un arc convexe comme pour un arc concave et en renversant ensuite la figure.

[27] Il doit être entendu une fois pour toutes que ce que nous venons de dire, et ce que nous dirons dans la suite, sur l'équilibre des polygones, suppose des efforts statiques, et non des développements de forces vives capables de produire des mouvements vibratoires dans les différentes pièces solides dont se composent les polygones.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS NÉCESSAIRES A L'ÉTABLISSEMENT DES POLYGONES D'ÉQUILIBRE STATIQUE.

SECT. 5. — Principes fondamentaux.

[28] Si un poids P (fig. 1) est supporté par deux cordons AB, AC faisant avec l'horizon des angles α_1 et α_2, il déterminera des tensions (*) t_1 et t_2 qui ensemble neutraliseront l'effet du poids P.

[29] Puisque le poids P agissant de haut en bas, dans le sens de la verticale, est équilibré par les deux forces obliques t_1 et t_2, il faut que les composantes verticales des tensions détruisent l'effet du poids P, et que les composantes horizontales de ces mêmes tensions se neutralisent, c'est-à-dire qu'il faut :

1° *Que la somme des composantes verticales des forces ou tensions* t_1 *et* t_2 *soit égale en intensité et contraire en direction au poids P que ces deux composantes verticales neutralisent;*

(*) Ici et dans tout ce qui suit, nous désignons par *tension d'un cordon* la réaction de la composante, suivant ce cordon, du poids ou de la force extérieure donnée.

Digitized by Google

2° *Que les deux composantes horizontales de ces tensions* t_1 *et* t_2 *soient égales entre elles et de directions contraires, puisque la tendance au déplacement horizontal du point* A, *lieu d'application des composantes* Q *et* $-Q_1$ *est nulle.*

[30] On doit donc avoir les relations suivantes entre les intensités et les directions des forces suivantes :

p_1 composante verticale de $-t_1$,

p_2 composante verticale de $-t_2$,

Q et $-Q_1$ composantes horizontales de t_1 et de t_2.

La somme des composantes verticales de t_1 et de t_2 étant égale et contraire au poids P, l'on a :

$$p_1 = -t_1 \sin \alpha_1$$
$$p_2 = -t_2 \sin \alpha_2,$$

et

$$-(t_1 \sin \alpha_1 + t_2 \sin \alpha_2) = P. \qquad (1)$$

[31] Les composantes horizontales Q et $-Q_1$ des tensions t_1 et t_2 se détruisant, doivent être égales puisqu'elles sont appliquées au même point, et l'on doit avoir :

$$Q - Q_1 = (t_1 \cos \alpha_1 - t_2 \cos \alpha_2) = 0. \qquad (2)$$

[32] Si au lieu de réunir les cordons au même point A, on voulait ajouter un côté horizontal AA_1 au polygone entre les cordons AB en A_1C (fig. 2), tout en conservant à ceux-ci leurs tensions respectives, il faudrait, en donnant la même inclinaison aux cordons donnés AB, A_1C, répartir le poids total P entre les deux nouveaux sommets A A_1 de la manière suivante :

Placer au point A la composante verticale de la tension t_1 du cordon AB qui a pour expression $t_1 \sin \alpha_1 = -p_1$, et appliquer ensuite à l'autre sommet A_1 la composante verticale du cordon A_1C qui a pour valeur $t_2 \sin \alpha_2 = -p_2$.

[33] Quant aux valeurs de t_1 et de t_2, qui sont fonctions du poids total P et des angles α_1 et α_2, elles se déduisent, comme on sait, des expressions suivantes :

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{\sin(90^\circ - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} P \\ t_2 &= \frac{\sin(90^\circ - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} P \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

[34] Pour éviter des répétitions, nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que les polygones dont nous aurons à nous occuper présentent tous cette particularité d'un côté horizontal, soit que cette disposition résulte de la forme même du polygone, soit qu'elle résulte d'une décomposition analogue à celle que nous venons d'indiquer, et que le poids total placé au sommet unique ait été partagé entre les deux nouveaux sommets en raison des composantes verticales de leurs tensions respectives.

En outre, quand nous aurons à étudier un polygone quelconque, après l'avoir ramené au polygone à côté horizontal, nous le diviserons en deux parties au moyen d'une verticale passant par le milieu du côté horizontal du polygone; et, dans les calculs, nous ne considérerons que l'une quelconque des deux parties dudit polygone, attendu que les rapports que nous établirons entre les côtés, les tensions, les angles et le poids de l'une quelconque des deux parties de polygone seront entièrement applicables aux éléments correspondants du côté opposé.

Ceci entendu une fois pour toutes, nous allons étudier les rapports qui lient entre eux les différents éléments d'un polygone.

[35] Si un polygone ABCDEF (fig. 3) supposé impondérable et inextensible est en équilibre sous l'action de poids donnés p_1, p_2, p_3, p_4 et de forces t_4 et Q appliquées respectivement aux cordons OA et DE, suivant les directions de ceux-ci, il devra satisfaire aux conditions suivantes qui ne sont, pour chaque sommet, que la répétition de ce que nous avons dit [1], c'est-à-dire que :

1° Le point A étant en équilibre sous l'action des trois forces Q, p_1 et t_1, il faut que l'une quelconque de ces trois forces soit égale et contraire à la résultante des deux autres;

Digitized by Google

2° Le point B, à son tour, étant en équilibre sous l'action des trois forces $-t_1$, p_2 et t_2, il faut que t_2 puisse être considéré comme égal et contraire à la résultante des deux autres, ou, ce qui revient au même, que t_2 soit identique à la résultante des deux autres forces t_1 et p_2 affectées de signes contraires à ceux qu'elles ont sur l'épure.

Le point C étant aussi en équilibre sous les trois forces $-t_2$, p_3 et t_3, il faut que t_3, ou la tension du cordon CD, soit égale et contraire à la résultante des deux autres, et ainsi de suite pour tous les autres sommets du polygone.

[36] Si donc, pour abréger, nous employons la lettre **r** pour indiquer *résultante de*, comme la lettre *f* est consacrée, dans le calcul des fonctions, avec la signification de *fonction de* toutes les lettres placées sur la parenthèse; nous aurons $t_1 =$ ~~de sorte que~~ $t_1 = \mathbf{r}(Q_1 . p_1)$ équivaudra à t_1 *égale la résultante des forces* Q et p_1.

Si l'on voulait avoir une résultante de signe contraire, l'on écrirait $-t_1 = -\mathbf{r}(Q_1 . p_1)$ ou encore $-t_1 = \mathbf{r}(-Q - p_1)$. Ceci une fois admis, nous poserons :

$$\left.\begin{array}{ll} -t_1 = \mathbf{r}(Q . p_1) & -t_3 = \mathbf{r}(-t_2 p_3) \\ -t_2 = \mathbf{r}(-t_1 p_2) & -t_4 = \mathbf{r}(-t_3 . p_4) \\ \text{Et par analogie} & -t_n = \mathbf{r}(-t_{n-1} . p_n) \end{array}\right\} \quad (4)$$

Remplaçant les tensions, dans le second membre, par leurs valeurs en fonction de Q et de p_1, p_2, p_3, etc., il vient :

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = \mathbf{r}[-Q - (p_1)] \\ t_2 = \mathbf{r}[-Q - (p_1 + p_2)] \\ t_3 = \mathbf{r}[-Q - (p_1 + p_2 + p_3)] \\ t_4 = \mathbf{r}[-Q - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)] \\ \text{Et par induction } t_n = \mathbf{r}[-Q - (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots\ldots + p_n)] \end{array}\right\} \quad (5)$$

Digitized by Google

[37] Comme on le voit par les expressions (4), les valeurs des tensions des différents côtés du polygone se déduiront de proche en proche, puisque la tension d'un élément quelconque du polygone pris en signe contraire est la résultante formée par la réaction de la tension du cordon précédent et du poids placé à l'extrémité inférieure du cordon dont on cherche la tension.

[38] La traduction linéaire des équations (4) est donnée par la fig. 4, où la tension d'un cordon CD, par exemple, se déduit de la tension du cordon BC qui le précède immédiatement et du poids p_3 placé au sommet formé par la réunion des cordons BC et CD.

[39] Les formules (5) déduites des équations (4) par voie de substitution correspondent à la fig. 5. Ici, la tension d'un cordon quelconque a pour mesure la résultante faite sur la composante horizontale Q et la somme des poids comptés, à partir du point le plus bas, jusqu'au sommet où commence le cordon dont on cherche la tension.

Les expressions (5) et la fig. 5 donnent, comme on voit les rapports algébriques et géométriques qui lient immédiatement les poids donnés :

1° Aux tensions des cordons;

2° Aux inclinaisons des éléments du polygone,

Quand on connaît la composante horizontale des tensions et la longueur des éléments ou les distances horizontales des poids donnés.

[40] De ce que nous venons de dire précédemment et de l'inspection des fig. 4 et 5, il est facile de conclure que, dans un polygone en équilibre sous l'action de poids quelconques, les éléments du polygone étant supposés impondérables, inextensibles et incompressibles :

1° *La composante horizontale des tensions est constante dans toute l'étendue du polygone, et par conséquent, égale à la tension du cordon horizontal;*

2° *La composante verticale d'un élément quelconque est égale à la somme des poids fixés à tous les sommets du polygone, depuis le point le plus bas jusqu'au sommet où commence immédiatement le sommet considéré;*

3° *La tension du cordon va en augmentant depuis le cordon horizontal, où elle*

Digitized by Google

est la plus faible égale et contraire à la composante horizontale, jusqu'au dernier élément du polygone (celui qui est le plus incliné), où la tension atteint son maximum.

Nous allons passer maintenant à la recherche des formes et des formules dont la considération peut être utile dans l'établissement des polygones d'équilibre.

Sect. 6. — Relations entre les coordonnées des sommets d'un polygone et les poids et les tensions auxquels ce polygone est soumis.

[41] Au lieu de construire le polygone de proche en proche, comme nous venons de le faire, et d'attendre la détermination d'un sommet pour y placer la composante verticale des poids, il est plus facile, dans la pratique, de s'y prendre de la manière suivante, qui a sur les deux autres d'abord l'avantage de la rapidité d'exécution, et ensuite le mérite de mettre en évidence l'influence d'une des données sur la forme du polygone, tout en débarassant l'épure des lignes inutiles de construction.

Après avoir établi les valeurs linéaires :

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = p_1 \\ P_2 = p_2 + p_1 \\ P_3 = p_3 + p_2 + p_1 \\ P_4 = p_4 + p_3 + p_2 + p_1 \\ \vdots \\ P_n = p_n + p_3 + p_2 + p_1 + \ldots\ldots\ldots + p_n \end{array}\right\} \qquad (6)$$

on portera perpendiculairement à une droite OX (fig. 6), considérée comme horizontale, les verticales 1, 2, 3, 4, etc., sur lesquelles doivent se trouver les sommets du polygone cherché, c'est-à-dire les lignes sur lesquelles doivent se trouver les poids donnés.

Sur ces verticales, et à partir de l'horizontale, on portera les grandeurs linéaires P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5, qui *représentent les composantes verticales des*

Digitized by Google

tensions de leurs éléments respectifs, comme cela résulte des formules (5).

A partir de chacune de ces perpendiculaires et sur l'horizontale OX, on portera la valeur linéaire — Q qui est la *composante horizontale constante des tensions des divers éléments du polygone.*

Construisant ensuite les résultantes sur les forces prises deux à deux $-(Q, P_1)$; $-(Q, P_2)$; $-(Q, P_3)$; $-(Q, P_4)$, etc., l'on obtiendra les obliques t_1, t_2, t_3, qui expriment les tensions des éléments correspondants du polygone en *directions parallèles* et en *intensités.* Ces tensions serviront à construire le polygone cherché, puisqu'elles donnent la direction des éléments et que l'on connaît d'ailleurs les verticales qui contiennent les sommets ainsi que la position de l'un d'eux.

[42] Si donc par le point A ou 1 on conduit AB parallèle à l'oblique t_1, l'on aura un des éléments du polygone puisque AB est parallèle à l'oblique t_1, et que les extrémités de cette droite se trouvent sur les verticales 1 et 2 où sont situés les sommets du polygone.

Par le point B, *ainsi déterminé*, on conduira la droite BC parallèle à t_2, et l'on aura le second élément du polygone cherché, et la position C du nouveau sommet par lequel doit passer l'élément suivant CD que l'on conduira parallèlement à t_3.

Ce nouvel élément CD déterminera à son tour un nouveau sommet D du polygone qui servira de point de départ à un nouvel élément du polygone; et ainsi de suite jusqu'au dernier élément du polygone cherché.

La méthode graphique que nous venons d'employer nous permet donc de tracer l'épure d'un polygone en équilibre sous des poids donnés, c'est-à-dire qu'elle nous fait connaître les tensions, les longueurs et les inclinaisons des côtés du polygone, ainsi que les ordonnées des sommets de ce même polygone. Déterminons maintenant les expressions algébriques de ces divers éléments.

[43] Il est évident que *l'ordonnée d'un des sommets d'un polygone est égale à la projection verticale de la partie du polygone comprise entre le point le plus bas et le sommet en question* (fig. 7);

Digitized by Google

Ou, ce qui revient au même, *à la somme des projections verticales des côtés du polygone compris entre le point le plus bas et le sommet considéré* (fig. 7).

[44] Or, déterminons la formule qui convient à l'un des côtés quelconques d'un polygone.

Soient (fig. 8) deux verticales n et $(n+1)$ entre lesquelles doit se trouver le côté cherché du polygone en question; supposons que l'on ait porté $nq = Q =$ la composante horizontale des tensions, et $nn' = P_n =$ la composante verticale de la tension du côté cherché, ou la somme des poids placés sur le polygone depuis le point le plus bas jusqu'au sommet n inclusivement, l'on aura (fig. 8) :

$$\frac{nq}{nn'} = \frac{ab}{an'}. \qquad (7)$$

Mais $nq = Q =$ la *composante horizontale constante de tension;*

$nn' = P_n =$ la somme des poids;

$ab = h'_n =$ la projection horizontale du côté cherché, ou la distance donnée entre les verticales n et $n+1$ qui doivent contenir les sommets R et S;

$an' = v'_n =$ la projection verticale du côté cherché, puisque RS doit être parallèle à $n'q$.

Ces symboles étant placés dans le rapport (7), il vient :

$$\frac{Q}{P_n} = \frac{h'_n}{v'_n}; \text{ d'où } v'_n = \left(\frac{P_n}{Q} h'_n\right). \qquad (8)$$

C'est-à-dire que *la projection verticale d'un des côtés* l'_n *d'un polygone est égale au rapport* $\frac{P_n}{Q}$ *des poids placés sur le polygone jusqu'au sommet inclusivement, et de la composante horizontale constante des tensions* $= Q$, *multiplié par la projection horizontale* h'_n *de ce même côté.*

[45] Ainsi (fig. 8) l'ordonnée du sommet D étant, en désignant par V_4 cette ordonnée,

$$V_4 = v'_1 + v'_2 + v'_3$$

Digitized by Google

devient, en remplaçant les projections verticales des différents côtés v'_1, v'_2, v'_3, par leurs expressions déduites par induction de la formule (8) :

$$V_4 = \frac{1}{Q}(P_1 h'_1 + P_2 h'_2 + P_3 h'_3);$$

en plaçant en facteur commun le rapport $\frac{1}{Q}$ puisque la composante horizontale des tensions est constante dans toute l'étendue du polygone.

[46] Par analogie, il viendra, pour L'ORDONNÉE V_n du $n^{ième}$ sommet placé sur la verticale passant par le point n compté à partir de l'origine :

$$V_n = \frac{1}{Q}(P_1 h'_1 + P_2 h'_2 + P_3 h'_3 + \ldots\ldots + P_{n-1} h'_{n-1}). \qquad (9)$$

Telle serait l'expression de *l'ordonnée* si les projections horizontales des côtés étaient connues; mais si, au contraire, les longueurs seules des côtés du polygone étaient données, comme cela se présente dans quelques cas, alors il faudrait obtenir une expression de V_n dans laquelle les projections horizontales fussent remplacées par des fonctions de l' : c'est ce que nous allons faire.

[47] De la fig. 8 nous tirons les rapports suivants :

$$\frac{n'b}{ab} = \frac{n'q}{nq}.$$

Mais $n'b = RS = l'_n =$ la longueur du côté du polygone compris entre les $n^{ième}$ et $(n+1)^{ième}$ sommets;

$ab = h'_n =$ la projection horizontale de l'élément l'_n;

$n'q = t_n =$ la tension de l'élément l'_n;

$nq = Q =$ la composante horizontale constante de tension.

Donc les rapports ci-dessus deviennent :

$$\frac{l'_n}{h'_n} = \frac{t_n}{Q}, \text{ d'où } h'_n = \frac{Q}{t_n} l_n'. \qquad (10)$$

Digitized by Google

Mais d'un autre côté,

$$t_n = \sqrt{Q^2 + P^2_n} = Q\left(1 + \frac{P^2_n}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

et en substituant cette valeur de la tension dans l'expression de h'_n trouvée plus haut, il vient :

$$h'_n = Ql'_n \frac{1}{t_n} = Ql'_n \frac{1}{Q\left(1 + \frac{P^2_n}{Q^2}\right)} = l'_n\left(1 + \frac{P^2_n}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

et l'on obtient pour la valeur de *l'ordonnée* V_n en fonction des côtés du polygone, en remplaçant dans (9) les valeurs de h'_n par leurs fonctions (12) :

$$V_n = \frac{1}{Q}\left\{P_1 l'_1\left(1 + \frac{P_1^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + P_2 l'_2\left(1 + \frac{P_2^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + P_3 l'_3\left(1 + \frac{P_3^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \right.$$
$$\left. + \dots\dots\dots + P_{n-1} l'_{n-1}\left(1 + \frac{P^2_{n-1}}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\} \tag{13}$$

Ou en développant chacun des termes de l'équation (13) :

$$V_n = \frac{1}{Q}\left\{\begin{array}{l} P_1 l'_1\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{P^2_1}{Q^2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{P^2_1}{Q^2}\right)^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{P^2_1}{Q^2}\right)^3 + \text{etc.}\right] \\ + P_2 l'_2\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{P^2_2}{Q^2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{P^2_2}{Q^2}\right)^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{P^2_2}{Q^2}\right)^3 + \text{etc.}\right] \\ + P_3 l'_3\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{P^2_3}{Q^2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{P^2_3}{Q^2}\right)^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{P^2_3}{Q^2}\right)^3 + \text{etc.}\right] \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ + P_{n-1} l'_{n-1}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{P^2_{n-1}}{Q^2}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{P^2_{n-1}}{Q^2}\right)^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{P^2_{n-1}}{Q^2}\right)^3 + \text{etc.}\right] \end{array}\right\} \tag{14}$$

[48] Cette formule peut encore se mettre sous la forme suivante, en ordonnant par rapport à $\frac{P}{Q}$:

Digitized by Google

$$V_n = \frac{1}{Q}\left\{\begin{array}{l} + [P_1 l'_1 + P_2 l'_2 + P_3 l'_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + P_{n-1} l'_{n-1}] - \\ \quad -\frac{1}{2}\left[P_1 l'_1\left(\frac{P^2_1}{Q^2}\right) + P_2 l'_2\left(\frac{P^2_2}{Q^2}\right) + P_3 l'_3\left(\frac{P^2_3}{Q^2}\right) + \ldots + P_{n-1} l'_{n-1}\left(\frac{P^2_{n-1}}{Q^2}\right)\right] + \\ \quad +\frac{1.3}{2.4}\left[P_1 l'_1\left(\frac{P^2_1}{Q^2}\right)^2 + P_2 l'_2\left(\frac{P^2_2}{Q^2}\right)^2 + P_3 l'_3\left(\frac{P^2_3}{Q^2}\right)^2 + \ldots + P_{n-1} l'_{n-1}\left(\frac{P^2_{n-1}}{Q^2}\right)^2\right] - \\ \quad -\frac{1.3.5}{2.4.6}\left[P_1 l'_1\left(\frac{P^2_1}{Q^2}\right)^3 + P_2 l'_2\left(\frac{P^2_2}{Q^2}\right)^3 + P_3 l'_3\left(\frac{P^2_3}{Q^2}\right)^3 + \ldots + P_{n-1} l'_{n-1}\left(\frac{P^2_{n-1}}{Q^2}\right)^3\right] + \\ \quad + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (15)$$

Telle est la formule qui donne les ORDONNÉES des sommets du polygone en fonction des côtés de ce même polygone : formule évidemment trop compliquée pour être employée telle qu'elle est à la solution pratique des conditions d'équilibre des polygones. Mais nous verrons que, dans les cas où les longueurs suivent une certaine loi mathématique (et c'est le cas le plus ordinaire en application), cette expression se ramène à la valeur des premiers termes de la série qui alors devient rapidement convergente, attendu que le rapport $\frac{P}{Q}$ a ordinairement une valeur très-faible dans la pratique, comme on pourra en juger par la suite.

[49] *Les* ABSCISSES (*) des sommets du polygone sont ordinairement les données du problème et, dans ce cas, elles sont exprimées par

$$H_n = (h'_0 + h'_1 + h'_2 + h'_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + h'_{n-1}). \qquad (16)$$

[50] Si les longueurs l'_n étaient les données du problème, alors il suffirait de remplacer, dans cette équation, les symboles h'_0, h'_1, etc., par leurs fonctions en l'_n. On a (12), pour la projection horizontale d'un des côtés :

$$h' = l'_n\left(1 + \frac{P^2_n}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (17)$$

(*) Les *abscisses* ou les *longueurs* des courbes ou des polygones seront toujours rapportées, pour les formules qui en donneront la mesure, à l'axe qui divise la courbe ou le polygone en deux parties symétriques.

Digitized by Google

L'équation (16) devient donc, en remplaçant les projections horizontales par les expressions analogues à celles (17) :

$$H_n = \left[h_0 + l'_1\left(1+\frac{P^2_1}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + l'_2\left(1+\frac{P^2_2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + l'_3\left(1+\frac{P^2_3}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \ldots\ldots + l'_{n-}\left(1+\frac{P^2_{n-1}}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \quad (18)$$

Développant chaque terme en série, comme dans le cas précédent, et ordonnant par rapport à Q, il vient :

$$H_n = \left\{\begin{array}{l} h_0 \\ + [l'_1 + l'_2 + l'_3 + l'_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + l'_{n-1}] \\ \quad -\frac{1}{2}\left[\frac{l'_1}{Q^2}P^2_1 + \frac{l'_2}{Q^2}P^2_2 + \frac{l'_3}{Q^2}P^2_3 + \ldots\ldots + \frac{l'_{n-1}}{Q^2}P^2_{n-1}\right] \\ \quad +\frac{1.3}{2.4}\left[\frac{l'_1}{Q^4}P^4_1 + \frac{l'_2}{Q^4}P^4_2 + \frac{l'_3}{Q^4}P^4_3 + \ldots\ldots + \frac{l'_{n-1}}{Q^4}P^4_{n-1}\right] \\ -\frac{1.3.5}{2.4.6}\left[\frac{l'_1}{Q^6}P^6_1 + \frac{l'_2}{Q^6}P^6_2 + \frac{l'_3}{Q^6}P^6_3 + \ldots\ldots + \frac{l'_{n-1}}{Q^6}P^6_{n-1}\right] \\ + \text{etc}\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (19)$$

Les mêmes observations que nous avons faites précédemment sur l'influence du rapport $\frac{P}{Q}$ étant applicables ici, on voit que la série pourra servir dans la plupart des cas de la pratique, où le poids et les longueurs du polygone pourront s'exprimer par une certaine loi mathématique.

[51] La LONGUEUR TOTALE du polygone, depuis le milieu de l'élément horizontal jusqu'au $n^{ième}$ sommet, inclusivement sera donnée par la relation suivante, quand les longueurs partielles des côtés seront connues :

$$L_n = [l'_0 + l'_1 + l'_2 + l'_3 + l'_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + l'_{n-1}]. \quad (20)$$

[52] Si les *longueurs* des côtés sont les inconnues du problème, et si elles ne sont fournies que par leur projection horizontale h_n, alors il faudra prendre l'_n en fonction de cette projection horizontale, comme il est indiqué par l'équation (12) de laquelle on tire :

$$l'_n = h'_n\left(1+\frac{P^2_n}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

Digitized by Google

Substituant cette valeur dans l'équation (20), on obtient :

$$L_n = \left[h_0 + h_1\left(1+\frac{P^2_1}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + h_2\left(1+\frac{P^2_2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + h_3\left(1+\frac{P^2_3}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \ldots\ldots + h_{n-1}\left(1+\frac{P^2_{n-1}}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]. \quad (22)$$

Développant aussi chacun des termes du second membre, en série, et ordonnant par rapport à $\frac{P}{Q}$ il vient, par l'expression de la *longueur du polygone* jusqu'au $n^{ième}$ sommet :

$$L_n = \left\{\begin{array}{l} h_0 \\ + h'_1 + h'_2 + h'_3 + h'_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + h'_{n-1}] + \\ \quad + \frac{1}{2}\left[h'_1\frac{P^2_1}{Q^2} + h'_2\frac{P^2_2}{Q^2} + h'_3\frac{P^2_3}{Q^2} + \ldots\ldots\ldots + h'_{n-1}\frac{P^2_{n-1}}{Q^2}\right] - \\ \quad - \frac{1}{2.4}\left[h'_1\frac{P^4_1}{Q^4} + h'_2\frac{P^4_2}{Q^4} + h'_3\frac{P^4_3}{Q^4} + \ldots\ldots\ldots + h'_{n-1}\frac{P^4_{n-1}}{Q^4}\right] + \\ \quad + \frac{1.3}{2.4.6}\left[h'_1\frac{P^6_1}{Q^6} + h'_2\frac{P^6_2}{Q^6} + h'_3\frac{P^6_3}{Q^6} + \ldots\ldots\ldots + h'_{n-1}\frac{P^6_{n-1}}{Q^6}\right] - \\ \quad - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\left[h'_1\frac{P^8_1}{Q^8} + h'^2\frac{P^8_2}{Q^8} + h'_3\frac{P^8_3}{Q^8} + \ldots\ldots\ldots + h'_{n-1}\frac{P^8_{n-1}}{Q^8}\right] + \\ + \text{etc}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (23)$$

Nous répéterons encore ici ce que nous avons déjà dit à l'occasion des deux autres développements, que, dans la pratique, le rapport $\frac{P}{Q}$ étant toujours fractionnaire et assez faible, la série devient assez convergente pour que l'on puisse considérer les premiers termes du développement comme fournissant une évaluation suffisamment exacte de la valeur de L_n.

[53] Après avoir déterminé les coordonnées et la longueur du polygone, il est presque toujours nécessaire de connaître les *tensions* des côtés du polygone afin d'en déduire les sections.

La TENSION d'un côté du polygone compris entre les $n^{ième}$ et $(n+1)^{ième}$ sommets est donnée par la relation (10)

$$t = \sqrt{Q^2 + P^2_n}, \quad (24)$$

Digitized by Google

Ou encore, en fonction de la longueur du côté et de la projection horizontale de ce côté :

$$t_n = \frac{l'_n}{h'_n} Q. \qquad (25)$$

Mais cette valeur de la *tension* est donnée en fonction de la composante horizontale constante des tensions Q : composante que l'on ne connaît pas toujours et qui, pour cette raison, ne permet pas de résoudre directement le problème des tensions dans le cas le plus général.

Nous verrons, par la suite, comment il est possible, dans la plupart des cas de la pratique, de déterminer la valeur de cette composante horizontale.

[54] Comme il est facile de le voir par l'équation (24), la tension va en augmentant au fur et à mesure que l'on s'avance sur le polygone, c'est-à-dire que cette tension augmente avec le poids. Quand P_n devient nul, ce qui revient à prendre la tension du côté horizontal, cas auquel $P_n = 0$, la tension se réduit à la valeur de Q, comme il était facile de le prévoir.

Mais, nous le répétons, la valeur de cette composante horizontale, dans la pratique, est donnée :

Ou directement ;

Ou par l'inclinaison du dernier côté du polygone ;

Ou par la tension de ce dernier côté ;

Ou par la valeur de l'une des coordonnées du dernier sommet du polygone, quand la longuenr totale du polygone est connue ;

Ou enfin par les deux coordonnées du dernier sommet du polygone, dont la longueur alors est une des inconnues du problème.

Alors la solution du problème ne présente plus de difficultés sérieuses dans la pratique, où presque tous les polygones d'une certaine étendue suivent une loi que l'on exprime dans les formules ci-dessus ; formules qui se simplifient beaucoup, comme nous aurons occasion de le voir dans la suite.

Digitized by Google

[55] La *tangente* de l'angle que fait le côté du polygone compris entre les $n^{\text{èmes}}$ et $(n+1)^{\text{èmes}}$ sommets, est donnée par la relation très-simple (fig. 8) :

$$\text{tang}\ \alpha_n = \frac{v_n}{h_n} = \frac{P_n}{Q}. \qquad (26)$$

Nous en verrons des applications.

Sect. 7. — Détermination, à une très-grande échelle, de tous les éléments d'un polygone.

[56] La fig. 7 fournit le moyen de déterminer tous les éléments nécessaires à l'établissement d'un polygone, tels que :

Les ordonnées,

Les abscisses,

Les longueurs partielles ou totales des côtés d'un polygone,

La tension d'un élément quelconque,

Enfin l'inclinaison d'un des côtés de ce même polygone.

Mais très-souvent, dans la pratique, il n'est pas possible d'employer ce mode de tracé faute d'espace suffisant; il est nécessaire alors de *condenser* les éléments cherchés et de les *grouper*, *dans la plus petite aire possible*, *en réduisant les lignes de construction à un minimum.*

[57] Comme l'indique la fig. 7, la détermination de tous les éléments d'un polygone se réduit au tracé d'une série de triangles dont les côtés ou les angles sont donnés; triangles qui, dans la figure dont nous venons de parler, s'ajoutent les uns à la suite des autres, et nécessitent dès lors une épure d'une certaine étendue.

Si l'on remarque que tous ces triangles ont une *base commune* qui est la *composante horizontale des tensions* Q, *laquelle est constante dans toute l'étendue du polygone*, on sentira qu'il est possible de déterminer tous les éléments d'un

Digitized by Google

polygone en n'employant qu'une aire capable de contenir le tracé du plus grand des triangles qui entrent dans l'épure en question.

[58] Soient (fig. 9) 2 lignes AB, BC perpendiculaires entre elles au point B.

Prenons sur AB la valeur *linéaire* de Q, et portons successivement sur la perpendiculaire BC les valeurs linéaires suivantes :

$$B \,.\, 2' = P_1$$
$$B \,.\, 3' = P_2$$
$$B \,.\, 4' = P_3$$
$$B \,.\, 5' = P_4,$$

les valeurs de P_1, P_2, P_3, etc., étant déterminées comme il est dit [41].

[59] Il est évident que les obliques, partant du point A et joignant successivement les points marqués 2', 3', 4' et 5' sur la perpendiculaire BC, donneront les tensions des côtés respectifs du polygone, et l'on aura :

$$A \,.\, 2' = t_1$$
$$A \,.\, 3' = t_2$$
$$A \,.\, 4' = t_3$$
$$A \,.\, 5' = t_4,$$

et ainsi de suite.

[60] Pour obtenir les longueurs des côtés du polygone, quand les projections horizontales en seront connues, il suffira de porter les longueurs de ces projections sur la ligne AB, et la perpendiculaire élevée par l'extrémité de cette projection horizontale donnera, par sa rencontre avec l'oblique correspondante au côté cherché, la longueur qu'il s'agit d'obtenir.

Portant successivement sur AB les longueurs h_1, h_2, h_3 et h_4, l'on obtiendra, par les perpendiculaires élevées par les extrémités de ces droites, les portions d'obliques :

Digitized by Google

$$A.2 = l_1$$
$$A.3 = l_2$$
$$A.4 = l_3$$
$$A.5 = l_4.$$

[61] Les inclinaisons de ces côtés, qui sont celles que ces mêmes côtés formeront avec l'horizontale, donneront directement les angles α_1, α_2, α_3 et α_4.

[62] Les ordonnées et les abscisses des sommets du polygone seront fournies directement par l'épure 9, puisqu'il suffira de porter les projections verticales ou les accroissements v_1, v_2, v_3, etc. des ordonnées, pour obtenir les valeurs de V_n, et que les abscisses seront données par l'addition des valeurs linéaires h_0, h_1, h_2, etc.

[63] Comme nous l'avons vu précédemment, par les formules générales (15), (19), (22) et (23) qui représentent les valeurs des coordonnées des sommets des polygones et les longueurs de ces mêmes polygones, la composante horizontale des tensions Q serait difficile à déduire directement de ces formules, dans le cas le plus général : mais il existe, pour le tracé des épures, des considérations qui permettent d'obtenir d'une manière suffisamment exacte, pour les besoins de la pratique, les valeurs linéaires de cette composante.

[64] Soient (fig. 10) des forces P_1 P_2 P_3 P_4 et P_5 portées perpendiculairement à l'horizontale OX et comprenant entre elles les projections horizontales respectives des côtés du polygone qu'il s'agit de trouver, mais qui doit satisfaire à cette condition d'avoir une valeur déterminée V_n pour l'ordonnée du $n^{ième}$ sommet.

Prenons, par exemple, le cinquième sommet qui se trouve en E sur la fig. 10, et proposons-nous de construire le polygone ayant V_5 pour ordonnée de ce sommet.

Avec une valeur quelconque de Q, que nous désignerons ici par Q_1, nous tracerons le polygone A′, B′, C′, D′, E′, dont la dernière ordonnée est V'_5.

Digitized by Google

[65] Si, maintenant que nous connaissons une ordonnée V'_5 correspondante à une composante horizontale Q_1, il nous était possible de lier ces valeurs à celle qui est donnée pour V_5 et à celle qu'il s'agit de déterminer pour Q, le problème serait évidemment résolu. Il ne s'agirait cette fois que de tracer l'épure, avec une valeur connue de la composante horizontale des tensions Q.

Or remarquons que la relation qui existe entre une ordonnée et la composante horizontale Q est donnée (9) par l'équation suivante :

$$V_n = \frac{1}{Q}(P_1 h_1 + P_2 h_2 + P_3 h_3 + \ldots\ldots\ldots + P_{n-1} h_{n-1}.)$$

Toute la partie du second membre qui est placée entre parenthèse ne varie pas dans le cas qui nous occupe; elle est constante. Nous la désignerons par C, et l'équation précédente sera de la forme

$$V_n = \frac{C}{Q}. \qquad (27)$$

Si l'on fait varier Q dans cette équation, en lui donnant une valeur Q_1, l'expression de la nouvelle ordonnée V'_n sera :

$$V'_n = \frac{C}{Q_1}, \qquad (28)$$

et le rapport entre les deux ordonnées correspondant à un même sommet n, mais avec des valeurs différentes de Q, deviendra :

$$\frac{V'_n}{V_n} = \frac{Q}{Q_1}; \qquad (29)$$

d'où

$$Q = \frac{V'_n}{V_n} Q_1. \qquad (30)$$

C'est-à-dire qu'il suffira de multiplier la valeur donnée premièrement à Q_1

Digitized by Google

par le rapport des deux ordonnées V'_n et V_n du même sommet pour obtenir la valeur de la composante horizontale cherchée, Q.

[66] Au lieu de résoudre le problème précédent par le calcul, on peut en obtenir une solution graphique (fig. 11) qui n'est que la forme de la formule (29). Ici

$$AB = Q_1,\ BC = Q,\ AB' = V'_n,\ \text{et}\ B'B'' = V_n.$$

On peut donc, si l'épure le permet, ou porter de nouveau sur la fig. 10 la valeur trouvée pour Q, et tracer le nouveau polygone A, B, C, D, E; ou déduire de la fig. 11 les nouvelles valeurs V_1, V_2, V_3, etc., en élevant perpendiculairement à AB une série de droites distantes du point A de quantités représentées linéairement par V'_1, V'_2, V'_3, etc.

[67] Si, le polygone devant avoir une très-grande étendue, on voulait en obtenir les éléments à une très-grande échelle, grandeur d'exécution, par exemple, il faudrait alors employer une épure semblable à celle de la fig. 9 qui donnerait les ordonnées par l'addition de leurs accroissements linéaires v_1, v_2, v_3, etc., et la valeur de la composante horizontale cherchée s'obtiendrait alors comme nous venons de le voir tout à l'heure.

[68] Quant aux ordonnées nouvelles, elles résulteraient naturellement d'une épure analogue à la fig. 12, où les accroissements v'_1, v'_2, v'_3, etc., seraient portés en addition sur une droite AB qui représenterait linéairement la composante horizontale Q.

[69] Les longueurs des côtés, les tensions et les angles du polygone cherché seraient fournis directement par une épure semblable à celle de la fig. 9, et que l'on construirait aisément une fois que la composante horizontale Q serait déterminée par les procédés que nous avons indiqués plus haut.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

Sect. 8. — Des polygones impondérables chargés de poids égaux à chaque sommet, et dont les côtés se projettent horizontalement suivant une même longueur.

Et des ponts suspendus à tiges équidistantes chargées de poids égaux, dans lesquels on néglige l'influence variable des poids des tiges et des câbles de suspension.

[70] Quand les poids, placés à chaque sommet, sont égaux entre eux et que les projections horizontales des côtés du polygone ont mêmes valeurs, les formules générales données plus haut se simplifient considérablement, et prennent alors une forme très-pratique, comme nous allons le voir dans les pages suivantes.

[71] Dans ce cas, les expressions (6) deviennent :

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = p \\ P_2 = 2p \\ P_3 = 3p \\ P_4 = 4p \\ \vdots \\ P_n = np \end{array}\right\} \qquad (31)$$

Digitized by Google

et comme toutes les valeurs de h sont les mêmes, l'équation (9) qui donne l'expression de l'ordonnée V_n du $n^{ième}$ sommet du polygone devient, en mettant h et p en facteurs communs :

$$V_n = \frac{ph}{Q}[1+2+3+4+\ldots\ldots\ldots+(n-1)]. \qquad (32)$$

[72] Si maintenant on fait la somme de tous les nombres compris entre la parenthèse du second membre, depuis 1 jusqu'à $(n-1)$ inclusivement, l'on obtient :

$$[1+2+3+\ldots\ldots\ldots+(n-1)] = \frac{n^2-n}{2}. \qquad (33)$$

Rétablissant cette sommation dans (32) il vient, en dernier lieu, pour la valeur de l'ordonnée du $n^{ième}$ sommet :

$$V_n = \frac{ph}{2Q}(n^2-n). \qquad (34)$$

Telle est l'expression de l'ordonnée du polygone (fig. 13) qui présente un côté horizontal à sa partie inférieure.

[73] Si au lieu du poids p l'on voulait placer dans la formule le poids par mètre courant de projection horizontale, et que nous représenterons par la lettre π, l'on aurait d'abord $\pi h = p$; car il faut en effet que le poids d'un intervalle h ou de deux $\frac{h}{2}$ soit égal au poids placé à l'un des sommets. Remplaçant dans la formule ci-dessus (34), p par la valeur πh, il viendra :

$$V_n = \frac{\pi h^2}{2Q}(n^2-n). \qquad (35)$$

[74] En faisant passer h^2 dans la parenthèse, on obtient :

$$V_n = \frac{\pi}{2Q}\left(\overline{nh}^2 - nh \,.\, h\right). \qquad (36)$$

Digitized by Google

Sous cette nouvelle forme, on voit que, comme rien ne limite la valeur de n ou de h, si ce n'est que ces deux valeurs doivent varier en raison inverse l'une de l'autre, quand on pose $nh = x$, il sera possible de passer de la forme polygonale à la forme courbe.

Puisque l'on doit avoir $nh = x$, il faut que, quand le nombre des sommets, et par conséquent celui des côtés, devient infiniment grand, les côtés deviennent infiniment petits : en observant que le terme xh s'évanouit quand h est infiniment petit, le caractère de discontinuité doit disparaître et l'équation (36) devient :

$$y = \frac{\pi}{2Q} \cdot x^2. \tag{37}$$

[75] L'équation (35) est celle d'une courbe quand la variable n peut prendre des valeurs quelconques entières ou fractionnaires; mais quand cette variable n est assujettie à la condition de ne croître que par unités, l'équation ne représente plus qu'une série de points situés sur la courbe dont nous venons de parler et distants entre eux de h, en projection horizontale.

[76] Si nous faisons comme précédemment $nh = x$, et si de plus nous désignons par y l'ordonnée correspondante, nous obtiendrons l'expression suivante pour l'équation de la courbe :

$$y = \frac{\pi}{2Q}(x^2 - xh). \tag{38}$$

Aux valeurs suivantes $x = o$ et $x = h$ correspondent deux ordonnées nulles. Ainsi donc la courbe coupe l'axe des x en deux points dont l'un se trouve à l'origine des coordonnées et l'autre à une distance h de cette même origine.

On voit également que toutes les ordonnées correspondantes à des valeurs

Digitized by Google

positives de x, plus petites que h, sont négatives : c'est-à-dire que toutes les parties de la courbe projetée suivant la longueur h, sur l'abscisse, à partir de l'origine des coordonnées, passent au-dessous de l'axe des x.

En outre chacune des ordonnées de la partie de cette courbe située au-dessous de l'axe des x, convient à deux points pour lesquels $x = u$ et $x = h - u$; et ces deux points qui ont mêmes ordonnées se confondent en un seul quand $x = u = h - u$. Ce qui exige que l'on ait $u = \frac{h}{2} = x$.

Pour ce cas, l'équation (38) devient :

[77] $$y = \frac{\pi}{2Q}\left(-\frac{h^2}{4}\right). \qquad (39)$$

Cette ordonnée répond en même temps au point le plus bas de la courbe, puisque pour toute valeur de x plus grande ou plus faible que $\frac{h}{2}$ correspondent des valeurs négatives plus faibles que celles de l'expression (39). Ainsi en faisant $x = \frac{h}{2} \pm u$ dans (38), l'on obtient cette expression unique :

$$y = \frac{\pi}{2Q}\left(u^2 - \frac{h^2}{4}\right) = \frac{\pi}{2Q}\left[u^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]. \qquad (40)$$

Or tant que cette expression sera négative, elle sera d'autant plus faible que u se rapprochera davantage de $\frac{h}{2}$. Quand u égalera $\frac{h}{2}$, l'ordonnée sera nulle et dès que u sera plus grand que $\frac{h}{2}$, l'ordonnée deviendra positive pour croître indéfiniment avec la variable u.

[78] Sous la nouvelle forme (40), il est facile de voir que cette équation correspond à une parabole identique à celle désignée par (37) : seulement ici l'axe des coordonnées au lieu d'être placé au sommet de la courbe est situé dans l'intérieur de cette courbe et sur son grand axe à une distance exprimée par la relation (39).

Digitized by Google

En un mot la courbe (40) peut être considérée comme étant la courbe (37) qui aurait glissé parallèlement à elle-même, le long de son grand axe, sur une longueur exprimée par (39).

[79] Ces deux courbes, qui comprennent entre elles le polygone d'équilibre déterminé, au moyen des sommets de ses angles, par l'équation (36), sont, l'une la parabole *inscrite*, et l'autre la parabole *circonscrite* à ce polygone, comme on le verra dans les notes placées à la suite de ce mémoire.

[80] Dans la plupart des applications, où le polygone ne présente pas un grand développement, l'on admet que la figure d'équilibre est celle que nous venons de déterminer : hypothèse qui revient à négliger la répartition inégale des poids dus aux chaînes et aux tiges suspension, et à ne compter qu'une moyenne pour la charge totale répartie uniformément sur la projection horizontale de la parabole ou du polygone parabolique. Comme ce cas est un de ceux qui se présentent très-fréquemment dans les applications, nous allons nous étendre assez longuement sur les méthodes ou les procédés propres à faire connaître les éléments nécessaires au tracé de cette figure.

[81] Les ordonnées *de la parabole* ou *du polygone parabolique* peuvent s'obtenir par le calcul direct de la formule (37), pour la parabole, et par la résolution numérique de la formule (35) pour le polygone parabolique ou la parabole qui lui est circonscrite.

Occupons-nous d'abord du polygone parabolique. L'expression de l'ordonnée du $n^{ième}$ sommet est (35) :

$$V_n = \frac{\pi h^2}{2Q}(n^2 - n).$$

Le calcul direct est assez facile puisqu'il suffit de déterminer, une fois pour toutes, le rapport $\frac{\pi h^2}{2Q}$ que nous supposons égal à A, ce qui permettra alors de représenter l'équation précédente sous cette forme :

Digitized by Google

$$V_n = A(n^2 - n), \qquad (41)$$

dans laquelle il suffit de faire successivement $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, etc., pour obtenir les ordonnées des 1er, 2e, 3e, etc., sommets du polygone.

[82] Avant d'aller plus loin, disons d'abord un mot des conditions qui fixent la valeur de la composante horizontale Q qui entre dans le paramètre de la parabole.

Ordinairement, dans l'application, les données desquelles on part pour établir les polygones, sont les longueurs de la corde et de la flèche. Pour compléter l'équation, on fixe les valeurs des poids et des espacements des tiges d'après des considérations d'art ou de convenance locale, de sorte que dans l'équation (35) tout est connu excepté la valeur de la composante horizontale Q qui est liée aux autres valeurs par la relation suivante déduite de (35)

$$Q = \frac{\pi h^2}{2V_n}(N^2 - N), \qquad (42)$$

dans laquelle N est le numéro du dernier sommet du polygone.

Cette composante, ainsi déterminée et introduite dans l'équation (35), sert à faire connaître tous les autres éléments du polygone.

[83] Reprenons maintenant le calcul des ORDONNÉES.

Nous avons vu que l'équation était (41) de la forme

$$V_n = A(n^2 - n).$$

Au lieu d'employer le calcul direct, il est quelquefois préférable de se servir de la méthode des différences qui réduit à de simples additions le calcul de la longueur des tiges de suspension, après une préparation assez simple de la formule.

Digitized by Google

Si dans l'équation (41) on fait successivement : $n-1$, n, et $n+1$, il vient :

$$\left.\begin{aligned} V_{n-1} &= A(n^2 - 3n + 2) \\ V_n &= A(n^2 - n) \\ V_{n+1} &= A(n^2 + n) \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

pour la valeur des trois ordonnées successives des sommets $n-1$, n et $n+1$.

Prenant maintenant les différences premières de ces ordonnées, l'on obtient :

$$\left.\begin{aligned} V_n - V_{n-1} &= \Delta_1 = A(2n-2) \\ V_{n+1} - V_n &= \Delta'_1 = A(2n) \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

et pour la différence seconde :

$$(\Delta'_1 - \Delta_1) = \Delta_2 = 2A \qquad (44)$$

C'est-à-dire que la différence seconde est constante comme il était aisé de le prévoir par le degré de l'équation.

La différence seconde est donc constante et égale à deux fois le coefficient de la fonction.

On peut alors former le tableau suivant pour le calcul successif des ordonnées.

Digitized by Google

NUMÉROS.	ORDONNÉES.	DIFFÉRENCES	
		premières Δ_1	secondes Δ_2
1	$y_1 = 0$		
2	$y_2 = 2A$	2A	
3	$y_3 = 6A$	4A	2A
4	$y_4 = 12A$	6A	2A
5	$y_5 = 20A$	8A	*id.*
6	$y_6 = 30A$	10A	*id.*
7	$y_7 = 42A$	12A	*id.*
8	$y_8 = 56A$	14A	*id.*
9	$y_9 = 72A$	16A	*id.*
10	$y_{10} = 90A$	18A	*id.*
»	»	»	»
»	»	»	»
»	»	»	»
n	$y_n = (n^2 - n)A$	$(2n-2)A$	2A

[84] Ce procédé de calcul, qui est très-simple, et qui donne très-rapidement toutes les valeurs des ordonnées, peut être exécuté par l'employé le moins habile, et n'exige aucune contention d'esprit. Nous pensons, cependant, que, pour ne pas s'exposer à recommencer une longue série de calculs par suite d'une erreur qui se serait glissée dans les additions successives et qui infirmerait tous les résultats à partir du rang où cette erreur aurait été commise, il conviendrait de calculer directement, et de distance en distance, quelques-unes des ordonnées (toutes les ordonnées de 10 en 10, par exemple); de la sorte on éviterait les inexactitudes provenant d'un défaut d'addition, et l'on pourrait même corriger celles qui proviendraient de quelques-uns des derniers chiffres que l'on aurait négligés dans l'appréciation de la valeur de A

Digitized by Google

ou des différences premières et secondes, et qui, répétés un très-grand nombre de fois, reproduiraient une différence sensible dans les dimensions des tiges.

[85] Si, au lieu de prendre l'équation du polygone parabolique, on prenait celle de la parabole tangente au côté horizontal du polygone, et qui est

$$y = Ax^2 = \frac{A}{4} n^2_1,$$

en donnant à n_1, les valeurs des nombres naturels impairs : les différences premières seraient

$$2A,\ 4A,\ 6A,\ \text{etc.}$$

et les différences secondes, constantes comme dans le premier cas, auraient aussi pour valeur 2A.

De sorte que les ordonnées de cette parabole deviendraient successivement :

$$\frac{A}{4}, \frac{9A}{4}, \frac{25A}{4}, \frac{49A}{4}, \text{etc.}$$

c'est-à-dire les produits des quarts des paramètres par les carrés des nombres naturels impairs 1, 3, 5, 7, etc., qui indiquent par ordre de rang, le numéro des tiges à partir de l'axe vertical de la courbe.

[86] Les tiges des ponts suspendus ne sont pas limitées à la tangente horizontale au polygone ou à la courbe : ces tiges descendent jusqu'à la partie inférieure des poutrelles qu'elles débordent de quelques centimètres pour recevoir l'écrou sur lequel repose la charpente du pont.

Ordinairement aussi le plancher affecte une forme courbe, parabolique, de sorte que les tiges peuvent être considérées comme composées de trois parties distinctes. Ainsi (fig. 14) :

Digitized by Google

1° Toute la partie placée au-dessus de l'horizontale OX sera considérée comme ordonnée de la parabole des chaînes. L'équation d'une ordonnée quelconque est

$$V_n = \frac{\pi h^2}{2Q}(n^2 - n).$$

2° Toute la partie comprise entre l'horizontale OX tangente à la courbe supérieure et l'horizontale O'X' tangente à la courbe inférieure, formée par le plancher du pont, a pour valeur la quantité constante D.

3° Enfin la partie comprise entre cette tangente horizontale inférieure O'X' et la courbe inférieure du plancher.

Cette courbe à laquelle on donne ordinairement la forme parabolique a pour expression de ses ordonnées :

$$f = a(n^2 - n). \tag{45}$$

Le paramètre a devant satisfaire à cette condition,

$$a = \frac{f_n}{(N^2 - N)}, \tag{46}$$

qui est déterminée par la grandeur que l'on veut donner à la flèche f_n du tablier : flèche correspondante à la N^ième^ tige, placée près des culées.

[87] *La longueur totale d'une tige de suspension* se composera donc de trois parties, qui, ajoutées ensemble, ont pour expression, en désignant par B_n la tige entière :

$$B_n = \left[\frac{\pi h^2}{2Q}(n^2 - n) + a(n^2 - n) + D\right], \tag{47}$$

ou encore, en remarquant que les valeurs de n sont les mêmes dans les deux termes du second membre, ce qui permet de les mettre en facteur commun :

Digitized by Google

$$R_n = \left[\left(\frac{\pi h^2}{2Q} + \alpha\right)(x^2 - x) + D\right]. \qquad (48)$$

De sorte qu'en réunissant les paramètres des deux paraboles supérieure et inférieure, le calcul des ordonnées des deux courbes ne demandera pas plus de temps que le calcul des ordonnées d'une seule.

[88] La détermination de la longueur des ABSCISSES est une opération très-simple, puisqu'elle résulte de l'addition des termes semblables. La formule de l'abscisse H_n est

$$H_n = [h_o + (n - 1)\, h]. \qquad (49)$$

Mais comme l'axe de la parabole coupe en deux parties égales le côté horizontal du polygone, il s'ensuit que l'on a :

$$h_o = \frac{h}{2}$$

et que l'expression (49) se réduit à

$$H_n = \left[\frac{h}{2} + (n-1)\, h\right] = \left(n - \frac{1}{2}\right) h. \qquad (50)$$

[89] Le calcul de la LONGUEUR DU POLYGONE est une opération de la plus grande importance dans l'établissement d'un pont suspendu, parce qu'une légère erreur dans la longueur de la chaîne en introduit une très-grande dans la flèche de cette courbe.

L'équation générale qui donne la longueur du polygone L_n depuis l'axe vertical du polygone jusqu'au $n^{ième}$ sommet, a été donnée plus haut (23) en fonction des projections des côtés de longueurs quelconques et des poids arbitraires. Mais dans le cas qui nous occupe, cette formule va se simplifier considérablement, d'abord parce que les projections horizontales des éléments sont constantes, et ensuite parce que les poids P_1, P_2, etc., suivant une loi

Digitized by Google

assez simple, permettent de réduire chaque série partielle du second membre à un seul terme exprimant la loi d'accroissement que suivent les poids sur la ligne polygonale.

[90] Pour le cas qui nous occupe, $h_0 = \frac{h}{2}$, puisque l'élément horizontal est divisé en deux parties égales par l'axe vertical de la figure: nous aurons donc :

$$h_0 = \frac{h}{2}. \tag{51}$$

Le second terme,

$$[h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\ldots + h_{n-1}]$$

deviendra, en observant que h est constant,

$$h\,[1_1 + 1_2 + 1_3 + \ldots\ldots\ldots + 1_{n-1}] = h\,(n-1). \tag{52}$$

Le troisième terme en série, qui a pour coefficient $\frac{1}{2}$, deviendra, en remplaçant P_n par sa valeur np, et en faisant sortir h de la parenthèse,

$$\frac{h}{2}\left[\frac{p^2}{Q^2} + \frac{\overline{2p}^2}{Q^2} + \frac{\overline{3p}^2}{Q^2} + \frac{\overline{4p}^2}{Q^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{(n-1)^2\,p^2}{Q^2}\right].$$

Plaçant en outre en facteur commun le rapport constant $\frac{p^2}{Q^2}$, l'on obtiendra, après la sommation des carrés des nombres naturels de 1 à $(n-1)$,

$$\frac{p^2 h}{2Q^2}\,[1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots\ldots + (n-1)^2] = \frac{hp^2}{2Q^2}\left[\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}\right]. \tag{53}$$

Le quatrième terme en série, qui a pour coefficient $-\frac{1}{2.4}$, deviendra, par des considérations analogues à celles développées ci-dessus,

$$-\frac{1}{8} \times \frac{p^4.\,h}{Q^4}\left[1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \ldots\ldots + (n-1)^4\right] = -\frac{p^4.\,h}{8Q^4}\left[\frac{2n^5 - 5n^4}{10} + \frac{10n^2 - n}{30}\right]. \tag{54}$$

[91] Réunissant ensuite tous les termes que nous venons de ramener au

Digitized by Google

cas qui nous occupe (51), (52), (53) et (54), il viendra, pour la longueur du polygone depuis l'axe jusqu'au $n^{ième}$ sommet, en négligeant les autres termes,

$$L = \left[\frac{h}{2} + h(n-1) + \frac{hp^2}{2Q^2}\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}\right) - \frac{p^4 h}{8Q^4}\left[\frac{2n^5 - 5n^4}{10} + \frac{10n^3 - n}{30}\right]\right]. \quad (55)$$

Cette expression est encore assez compliquée; mais si l'on fait attention que dans la pratique le rapport $\frac{p}{Q}$ est toujours une fraction très-faible, on sentira de suite la possibilité de simplifier cette équation (55), et si l'on ne tient pas compte du terme qui contient le rapport $\frac{p}{Q}$ à la quatrième puissance comme sans influence pratique sur les résultats, l'on arrive à l'expression suivante :

$$L = \left[nh - \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\left(\frac{p}{Q}\right)^2\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}\right)\right]. \quad (56)$$

qui donne la longueur du polygone jusqu'au $n^{ième}$ sommet inclusivement, en fonction du poids placé à chaque sommet et de la composante horizontale des tensions.

[92] Si l'on voulait obtenir une expression de cette longueur L_n qui ne contînt pas le rapport $\frac{p}{Q}$, il faudrait remplacer celui-ci en fonction de l'ordonnée V_n du sommet n du polygone; ordonnée qui est ordinairement une des données du problème; l'on aurait alors, en substituant l'équivalence,

$$\frac{p}{Q} = \frac{2 \cdot V_n \cdot}{(n^2 - n)\, h}$$

tirée de (34), dans l'équation précédente :

$$L_n = \left[nh - \frac{h}{2} + \frac{2}{h}\left(\frac{V_n}{n^2 - n}\right)^2\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}\right)\right] =$$
$$= \left[nh - \frac{h}{2} + \frac{V^2_n}{3 \cdot h}\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{(n^2 - n)^2}\right)\right]. \quad (57)$$

Digitized by Google

Mais cette équation est encore susceptible de simplification ; et si l'on observe que

$$\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{(n^2 - n)^2} = \frac{2(n^2 - n)n - (n^2 - n)}{(n^2 - n)^2} = \frac{n + (n-1)}{(n-1)n} = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right),$$

il vient pour l'équation (57), en posant

$$h\left(n - \frac{1}{2}\right) = H_n,$$

$$(nh - h) = \left(H_n - \frac{h}{2}\right),$$

$$nh = \left(H_n + \frac{h}{2}\right),$$

$$L_n = \left[H_n + \frac{V^2_n}{3}\left(\frac{1}{H - \frac{h}{2}} + \frac{1}{H + \frac{h}{2}}\right)\right]. \qquad (58)$$

[93] Dans les cas ordinaires que présente la pratique, la valeur de h ou de l'intervalle compris entre les tiges de suspension est assez petite devant l'ouverture totale du pont $2H_n$, pour qu'en la négligeant il n'en résulte pas d'erreur appréciable, alors la formule (58) se simplifie encore, et elle devient :

$$L_n = \left[H_n + \frac{2 \cdot V^2_n}{3 \cdot H_n}\right]. \qquad (59)$$

Telle est l'expression de la longueur totale du polygone depuis l'axe vertical jusqu'au sommet n inclusivement, dont on pourra se servir dans les applications, au moins pour l'avant-projet, si l'on ne voulait pas se contenter de ce degré d'approximation pour le projet définitif. Dans ce dernier cas il faudrait, comme nous l'avons dit plus haut, se servir de la formule (58).

[94] L'équation (23), qui donne la longueur d'un polygone, peut en même temps fournir l'expression de la longueur de la courbe-limite du po-

Digitized by Google

lygone. Pour cela il suffit de faire disparaître le caractère de discontinuité que présente la dite équation.

A cet effet représentons par $\Sigma^{n-1}(a)$ la somme des nombres naturels depuis 1 jusqu'à $(n-1)$ inclusivement;

Par $\Sigma^{n-1}(a^2)$ la somme des carrés des nombres naturels depuis 1 jusqu'à $(n-1)$ inclusivement; et, en général, si $\Sigma^{n-1}(a^\alpha)$ représente la somme des puissances α des nombres naturels compris de 1 à $(n-1)$ inclusivement, il viendra, par l'équation (23) appliquée aux polygones paraboliques où h est constant et P_n égal à np; il viendra, dis-je,

$$L_n = \left[\frac{h}{2} + h\,\Sigma^{n-1}(1) + \frac{p^2 h}{2Q^2}\Sigma^{n-1}(a^2) - \frac{hp^4}{8Q^4}\Sigma^{n-1}(a^4) + \frac{hp^6}{16Q^6}\Sigma^{n-1}(a^6) - \right.$$
$$\left. - \frac{5hp^8}{128Q^8}\Sigma^{n-1}(a^8) +, \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\right]. \qquad (60)$$

[95] Or chaque terme de cette équation est de la forme:

$$\frac{hp^\alpha}{2Q^\alpha}\Sigma^{n-1}(a^\alpha):$$

et en observant que, si la courbe est continue, il faut que le poids soit réparti uniformément sur sa projection horizontale, ce qui exige que l'on ait, comme nous l'avons déjà vu, $p = \pi h$, en appelant π le poids par mètre courant du plancher du pont, et h l'intervalle qui existe entre les tiges dans le polygone. Le terme, modifié comme nous l'avons vu ci-dessus, deviendra donc:

$$\frac{h^{\alpha+1}\pi^\alpha}{Q^\alpha}\Sigma^{n-1}(a^\alpha).$$

Mais on sait, par la théorie du calcul des différences, que l'on a, en général,

$$\Sigma^{n-1}(a^\alpha) = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{n^\alpha}{2} +, \text{etc.},$$

Digitized by Google

c'est-à-dire que la sommation élève d'un degré la puissance du terme à sommer.

Le terme précédent deviendra alors :

$$\left(\frac{\pi}{Q}\right)^{\alpha}\left(\frac{h^{\alpha+1}n^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{h^{\alpha+1}n^{\alpha}}{\beta}+\text{etc.}\right).$$

Mais rien dans le calcul ne limitant la valeur de h ni celle de n : la seule condition étant que ces deux quantités varient inversement l'une de l'autre, de sorte que l'on ait toujours par le produit nh une même valeur, on peut supposer par la pensée que h décroît indéfiniment, tandis que n suit une marche contraire : à la limite, quand n devient infiniment grand, h s'évanouit, et $nh=x$ égale l'abscisse de la courbe, de sorte que le terme général ci-dessus se réduit à

$$\left(\frac{\pi}{Q}\right)^{\alpha}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

les termes qui renfermaient encore h et qui étaient de la forme $x^{\alpha}h$ ayant disparu par l'évanouissement de h.

[96] Tous les termes de la formule (60) affecteront donc cette forme, et il viendra, en faisant disparaître comme nuls tous les termes où h serait facteur seul ou d'un degré plus élevé que n, et en remplaçant le symbole L_n par S pour indiquer la transformation de la ligne brisée en ligne courbe continue :

$$S=\left\{x+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^{2}\frac{x^{3}}{3}-\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^{4}\frac{x^{5}}{5}+\frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^{6}\frac{x^{7}}{7}-\frac{5}{128}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^{8}\frac{x^{9}}{9}+\text{etc.}\right\} \quad (61)$$

[97] Dans la pratique on peut se borner aux deux premiers termes, et il vient alors :

$$S=\left\{x+\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^{2}x^{3}\right\}. \quad (62)$$

[98] Si l'on voulait obtenir la longueur de la courbe parabolique en

Digitized by Google

fonction de ses coordonnées x et y seulement, il viendrait, en remplaçant $\left(\frac{\pi}{Q}\right)$ par sa valeur tirée de (37)

$$\frac{\pi}{Q} = \frac{2y}{x^2},$$

l'équation suivante, au lieu de (62),

$$S = \left\{ x + \frac{1}{6}\left(\frac{2y}{x^2}\right)^2 x^3 \right\} = \left\{ x + \frac{2}{3}\frac{y^2}{x} \right\}. \qquad (63$$

[99] Passons maintenant à la détermination des TENSIONS des côtés d'un polygone parabolique.

L'expression générale de la tension que supporte le côté d'un polygone placé entre les sommets n et $(n+1)$, est (24)

$$t_n = \sqrt{Q^2 + P^2_n};$$

mais ici comme $P_n = np$, il vient :

$$t_n = \sqrt{Q^2 + n^2 p^2}.$$

[100] Si, ne connaissant pas la valeur de la composante horizontale des tensions, on voulait obtenir la valeur ci-dessus, il faudrait remplacer cette composante Q par son équivalent tiré de (34), et il viendrait d'abord :

$$Q = \frac{ph}{2V_n}(n^2 - n),$$

et, ensuite, en faisant sortir n^2p^2 du radical,

$$t_n = np\sqrt{\left(\frac{nh - h}{2V_n}\right)^2 + 1}. \qquad (65)$$

[101] Lorsque le polygone se transforme en une courbe, la composante

Digitized by Google

horizontale des tensions se simplifie, dans son expression, et elle devient, déduite de (37),

$$Q = \frac{\pi x^2}{2y}, \tag{66}$$

et comme le poids total dans cette dernière hypothèse est représentée par πx, l'on obtient, pour l'expression de la tension t_n correspondante au point des câbles dont l'abscisse est représentée par x,

$$t_x = \sqrt{\left(\frac{\pi x^2}{2y}\right)^2 + (\pi x)^2} = \pi x \sqrt{\left(\frac{x}{2y}\right)^2 + 1}. \tag{67}$$

[102] La *tangente de l'angle* α que fait le dernier élément du câble ou du polygone avec l'horizontale, est donnée par la relation (26), rappelée ci-dessous :

$$\text{tang}\, \alpha_n = \frac{P_n}{Q}.$$

Pour le cas d'un polygone $P_n = np$ et $Q = \frac{ph}{2V_n}(n^2 - n)$; d'où

$$\text{tang}\, \alpha = \frac{np}{\frac{ph}{2V_n}(n^2 - n)} = \frac{2V_n}{h(n-1)}. \tag{68}$$

[103] Quand le polygone se transforme en une courbe $P_n = \pi x$ et $Q = \frac{\pi x^2}{2y}$; de sorte que l'expression générale de la tangente de l'angle est réduite à

$$\text{tang}\, \alpha_x = \frac{\pi x}{\frac{\pi x^2}{2y}} = \frac{2y}{x}. \tag{69}$$

[104] Telles sont les formules à l'aide desquelles seront déterminées les principales dimensions et les formes des appareils des ponts suspendus; mais il est souvent nécessaire, dans la pratique, de recourir à des tracés d'épure, soit pour obtenir un résultat que le calcul fournirait avec

Digitized by Google

trop de peine, soit pour contrôler des opérations précédemment données par le calcul; c'est pourquoi nous allons examiner ici quelques-uns des tracés qui, par leur simplicité, peuvent être employés par les constructeurs les moins exercés.

[105] Le premier moyen qui s'offre naturellement à l'esprit c'est de calculer directement quelques-unes des ordonnées et d'obtenir les autres par une interpolation graphique : mais on sent que ce procédé, qui n'est pas exempt d'erreur, exige encore beaucoup de temps et des instruments parfaits pour obtenir les ordonnées dont on cherche la grandeur.

Mais si l'on pouvait obtenir toutes les ordonnées par le tracé d'une seule droite, l'opération serait facile et rapide, puisqu'il suffirait de faire passer une règle par le point pris comme point de départ, et par le sommet d'une des ordonnées dont la valeur serait fournie directement par le problème, ou aurait été calculée par l'une des formules données plus haut. On parvient à ce résultat en remarquant que l'équation

$$V_n = A(n^2 - n)$$

du polygone parabolique; ou

$$y = Ax^2$$

de la parabole devient celle d'une droite, en posant

$$V_n = Am$$

et

$$y = Az;$$

c'est-à-dire en faisant $(n^2 - n) = m$ pour le premier cas, et $x^2 = z$ pour le second.

[106] Ainsi, sur une droite indéfinie OA (fig. 15) portons, à partir du point O pris comme centre, les distances $(2^2 - 2) = 2$, $(3^2 - 3) = 6$, $(4^2 - 4) = 12$, $(5^2 - 5) = 20$; $(6^2 - 6) = 30$; $(7^2 - 7) = 42$, etc., puis,

Digitized by Google

par ces différents points, élevons à la droite OA les perpendiculaires 2, 3, 4, 5, 6 et 7;

Si, par l'extrémité de l'ordonnée V, donnée d'avance comme flèche du polygone, et le point O pris comme premier sommet du polygone, nous conduisons l'oblique OB, cette droite coupera les perpendiculaires à OA suivant des longueurs proportionnelles aux ordonnées des sommets du polygone parabolique.

Pour avoir la forme de ce polygone, il suffira de prendre sur une droite OA' une suite de grandeurs linéaires représentant les projections horizontales données des côtés du polygone, et d'élever en chacun de ces points des perpendiculaires égales aux droites, obtenues précédemment, pour tracer (fig. 15') le polygone 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7, qui sera le polygone cherché.

[107] Comme nous l'avons dit plus haut, la tige d'un pont suspendu est formé de trois parties :

1° L'ordonnée parabolique comprise entre la courbe ou le polygone et la tangente horizontale à la chaîne de suspension;

2° Une partie constante égale à la plus petite distance entre la chaîne de suspension et le dessous des poutrelles du plancher;

3° Enfin les ordonnées de la courbe formée par le plancher du pont : courbe qui, dans la plupart des cas, est de même nature que la courbe des câbles.

D'après cela, une tige quelconque, dont b désigne la longueur totale, a pour expression :

$$b = A(n^2 - n) + A'(n^2 - n) + D.$$

La forme correspondante à cette formule est évidemment représentée par la figure (16), et ses ordonnées b, ou les valeurs totales des tiges, seront fournies graphiquement par la fig. 16, dont la construction est analogue à celle de la fig. 15.

[108] Portant donc sur une droite OA (fig. 16) des distances réprésentées par

Digitized by Google

$$(2^2-2)=2,\quad (3^2-3)=6,\ \ldots\ldots\ldots\ (7^2-7)=42.$$

En ces différents points élever des perpendiculaires indéfinies à la droite OA; et sur la perpendiculaire élevée à la distance $(7^2-7)=42$, on mesurera une distance V, prise comme flèche du polygone supérieur. Conduisant par le point B et par le point O une droite, l'on obtiendra par l'intersection de cette droite OB avec les perpendiculaires les extrémités supérieures de toutes les tiges de suspension.

Conduisant ensuite O_1A_1 parallèlement à OA et à une distance de cette dernière mesurée par l'abaissement du dessous des poutrelles du plancher, au-dessous de la chaîne de suspension, l'on aura sur chaque perpendiculaire la quantité constante de la tige comprise entre les deux horizontales tangentes, l'une à la courbe supérieure des chaînes, l'autre à la courbe inférieure du dessous des poutrelles.

Si ensuite on porte de A_1 en B_1 une grandeur égale à la flèche f_1 du plancher du pont, l'on obtiendra les extrémités inférieures de toutes les tiges de suspension, par les intersections de toutes les perpendiculaires avec la droite conduite suivant B_1O_1.

Chaque tige de suspension sera donc mesurée par la portion de la perpendiculaire comprise entre les deux obliques BO et B_1O_1.

La (figure 16′) représente l'épure du polygone et de la courbure du plancher construits avec les ordonnées fournies par la (figure 16).

[109] Quand on peut disposer d'une aire convenable, on obtient, par ce procédé, les tiges en grandeur d'exécution. Par aire convenable, nous n'entendons pas une surface qui pourrait contenir la moitié de l'épure totale des chaînes et des tiges du pont. Pour notre tracé, en effet, il suffit que la plus grande des tiges puisse entrer dans l'épure: l'axe des abscisses peut avoir une longueur quelconque, il sera toujours possible d'en déduire la grandeur de l'unité avec laquelle on mesurera les distances sur l'horizontale, puisque cette grandeur est arbitraire et qu'elle ne dépend pas de celle qui a

Digitized by Google

été choisie pour mesurer les longueurs des tiges. La seule considération qui devra guider le constructeur dans le choix de l'unité des asbcisses, c'est de ne point avoir pour la ligne OA (fig. 16) une longueur trop faible relativement à celle de AB, car alors l'inclinaison de l'oblique OB serait assez considérable, et elle couperait les perpendiculaires suivant des angles qui, s'écartant beaucoup de l'angle droit, laisseraient beaucoup d'incertitude sur la position réelle du point d'intersection, et par conséquent exposeraient le constructeur à commettre d'assez graves erreurs dans l'estimation des longueurs des tiges.

Pour se rapprocher le plus possible de l'angle droit dans les angles que forment les deux obliques avec les perpendiculaires, tout en conservant les mêmes dimensions d'épure, on peut adopter la disposition représentée par la (figure 17).

Après avoir tiré les deux parallèles OA, O_1A_1, comme dans la (figure 16), on porte la longueur totale BB_1, mais telle que l'on ait $AB = A_1B_1$: de la sorte les obliques OB, O_1B_1 sont également inclinées sur les droites OA et O_1A_1, et l'on évite l'inconvénient que peut présenter la disposition de la figure 16, de couper sous des angles trop aigus les lignes qui représentent les tiges de suspension.

[110] Si l'on manquait d'une aire convenable, soit sous le rapport des dimensions, soit sous celui de la régularité de sa surface, on pourrait alors recourir au moyen que nous avons employé il y a une douzaine d'années environ, pour déterminer les longueurs des tiges de suspension en grandeur d'exécution.

Sur un terrain grossièrement dressé d'avance (fig. 18) on plante des piquets espacés d'un mètre cinquante environ, dans la direction d'une droite OA. Suivant une seconde droite AB, perpendiculaire à OA, on plante une autre rangée de piquets sur une longueur au moins égale à la plus grande tige de suspension. Puis on fait des opérations semblables suivant les lignes BC et OC, de manière à former un quadrilatère aussi parfait que

Digitized by Google

possible. On établit ensuite une autre ligne de piquets suivant la diagonale OB.

Cette opération terminée, on arrase de niveau les têtes de piquets (fig. 19), puis sur ces têtes de piquets placées dans un plan aussi parfait qu'il est possible, on fixe des planches minces de 10 à 12 centimètres de largeur. L'on obtient ainsi la figure O, A, B, C, et la diagonale OB (fig. 18).

Après avoir tiré au cordeau les deux droites OA OB qui divisent aussi exactement que possible la largeur de chacune des planches en deux ; on élève sur OA les perpendiculaires qui doivent représenter les tiges, comme dans les (figures 15 et 16), et les intersections de ces perpendiculaires avec l'oblique OB, déterminent les longueurs cherchées.

[111] L'ingénieur qui aurait un grand nombre de ponts suspendus à construire pourrait éviter les répétitions d'épure en dressant, une fois pour toutes, un tableau graphique qui ne renfermerait que des lignes menées parallèlement entre elles à des distances, d'un même point, proportionnelles aux quantités

$$(2^2-2)=2,\quad (3^2-3)=6,\quad (4^2-4)=12,\ \ldots\ldots\ldots\ (n^2-n).$$

Ce tableau graphique, qui serait analogue à celui que représente la (figure 20), permettrait d'obtenir immédiatement toutes les grandeurs des tiges, s'il renfermait un nombre suffisant de parallèles. Les numéros des tiges sont comptés à partir du milieu de la chaîne.

Pour tracer par exemple les tiges d'un pont suspendu qui aurait 24 tiges ; 12 pour la moitié de la chaîne, au moyen de l'épure 20, il suffirait de porter, à partir de la ligne OX, et sur la douzième parallèle, une grandeur représentant la somme des flèches des chaînes et du plancher, et l'on obtiendrait, par l'oblique OB, les longueurs voulues des tiges. Il ne resterait plus, pour compléter chaque longueur de tige, qu'à ajouter aux grandeurs fournies par l'épure une quantité constante analogue à celle qui est représentée par AA_1 dans la (figure 16).

Digitized by Google

Pour des demi-longueurs de chaînes comprenant 20 ou 24 tiges, il suffira de porter (fig. 20) les flèches totales (de la chaîne et du tablier du pont) A'B' ou AB pour obtenir par les obliques OB', OB les longueurs cherchées des tiges de suspension.

Si pour un pont d'une faible portée la flèche totale devait être considérable, relativement à l'étendue du tablier, il vaudrait mieux, pour éviter les intersections sous des angles très-aigus, partager la flèche totale A"B" en deux parties égales, dont une partie serait alors placée au-dessus de OX suivant A"B_1", et l'autre moitié au-dessous de OX suivant A"A_1". Les longueurs de tiges seraient alors comprises entre les obliques O ", et OA"$_1$ au lieu d'être renfermées entre l'horizontale OX et l'oblique OB" dont l'inclinaison sur la perpendiculaire est trop considérable pour ne pas laisser d'incertitude sur les lieux réels des intersections qui doivent fournir les longueurs des tiges de suspension.

[112] Si, par suite du peu d'espace dont on pourrait disposer pour l'épure générale des tiges de suspension, l'échelle des abscisses était tellement petite que les lignes sur lesquelles on devrait mesurer les longueurs des premières tiges se confondissent, il faudrait alors faire une épure à part, à une échelle convenable, pour ces premières tiges que l'on ne pourrait lire sur l'épure générale.

La figure 21 représente cette épure des premières tiges, à une grande échelle, et nous avons supposé que la tige n° 6, qui est la dernière ici, est la première que l'on ait pu lire distinctement sur l'épure générale.

[113] Tels sont les différents procédés graphiques à l'aide desquels il sera toujours possible d'obtenir à une échelle suffisante toutes les tiges d'un pont suspendu où la charge peut être considérée comme uniformément répartie.

Si nous nous sommes un peu arrêtés sur cette conversion des courbes en droites pour le tracé des ordonnées, c'est que nous aurons à en faire de

Digitized by Google

nombreuses applications dans la suite. La plupart des méthodes que nous publions ici ont la sanction d'une expérience de douze ans au moins, pour avoir été employées non-seulement par nous à l'établissement de plusieurs ponts suspendus, mais encore par plusieurs de nos camarades auxquels nous avons communiqué, depuis longtemps, une grande partie des résultats que nous consignons dans ce mémoire.

Nous devons ajouter que déjà plusieurs d'entre eux ont dressé, pour leur usage, des tableaux graphiques semblables à celui de la (figure 20) et qu'ils s'en servent presque exclusivement aujourd'hui (*), tant pour la solution des problèmes que nous venons d'examiner, que pour résoudre des questions plus compliquées que présente l'établissement des ponts suspendus, quand on veut tenir compte exactement du poids de l'ensemble de l'appareil, comme nous le verrons dans la suite.

[114] Pour tracer directement l'épure du polygone parabolique, par la méthode indiquée (fig. 7), on remarquera que, dans le cas de tiges équidistantes, les poids placés aux extrémités des tiges étant égaux, il suffira de porter la grandeur du poids total dans la direction de la dernière tige (fig. 22) (soit P_{10}, par exemple) et de conduire l'oblique A'O pour avoir, dans la direction de chaque tige, la valeur linéaire du poids total correspondant à cette tige.

Pour déterminer la grandeur de la composante horizontale Q des tensions, remarquons que la tangente de l'angle que fait cette composante avec la tension t_{10}, est donnée par la formule (68)

$$\text{tang}\ \alpha_n = \frac{2V_n}{h(n-1)},$$

formule qui, par le cas qui nous occupe, où $n=10$, se change en celle-ci :

(*) Une partie de ces détails sur le tracé des ordonnées paraboliques a été publiée par nous en janvier 1840, dans la *Revue de l'architecture et des travaux publics*, dirigée avec beaucoup de goût et de talent par M. César Daly.

Digitized by Google

$$\text{tang } \alpha_{10} = \frac{2V_n}{h(10-1)}.$$

$$\text{Or ici } (nh - h) = (10h - h) = (OA - O1).$$

Ainsi donc la tangente sera égale au rapport du double de l'ordonnée V_{10} à la portion de l'abscisse 1A, à peu près comme dans la parabole où la tangente est égale au rapport de l'abscisse au double de l'ordonnée.

Si donc, sur la direction de la verticale passant par le sommet 1, on porte V_{10} de 1 en B″, et si l'on trace l'oblique B″B, l'on aura l'expression de la tangente α_{10}, car, d'après cette épure 22,

$$\text{tang } \alpha_{10} = \frac{2V_{10}}{10h - h} = \frac{B'B''}{1.A}.$$

Conduisant ensuite, par l'extrémité de P_{10} et parallèlement à B″B, l'oblique t_{10}, on déterminera sur l'horizontale un point qui mesurera la grandeur de la composante horizontale constante Q.

Cette valeur de Q portée sur l'horizontale à partir de chacune des verticales, déterminera, avec les valeurs de P_1, P_2, P_3, etc., les obliques t_1, t_2, t_3, etc., qui serviront à tracer les côtés du polygone cherché, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10.

[115] Indépendamment des ordonnées, l'ingénieur a également besoin de connaître les tensions des côtés ainsi que la longueur de ces mêmes côtés, surtout si la chaîne doit être formée de chaînons en barres de fer. Dans ce dernier cas, surtout, la connaissance exacte des longueurs des côtés du polygone est indispensable.

Ordinairement, cependant, quand la chaîne doit se composer de chaînons formés de fer en barres, on donne même longueur à tous les chaînons, afin d'éviter des lenteurs ou des inexactitudes dans la fabrication; et les tiges, dès lors, ne sont plus équidistantes. Dans ce cas la courbe change de nature, comme nous le verrons dans la suite.

Digitized by Google

[116] La détermination graphique des éléments de la chaîne parabolique s'obtient par les considérations et les tracés des paragraphes [58] à [69], et des figures (9), (11) et (12).

Dans le cas actuel, les projections horizontales h ayant mêmes valeurs, et les poids placés à tous les sommets du polygone étant égaux entre eux, l'épure de la figure 9 se simplifie, et elle devient celle de la figure 23 (*). Épure qui, comme on le sait, donne les valeurs des tensions et les longueurs de côtés du polygone avec une exactitude suffisante.

La composante horizontale Q est donnée par AB, et les poids sont placés sur la perpendiculaire BC. Les tensions sont représentées par les obliques qui partent du point A et qui aboutissent à la perpendiculaire BC.

Les longueurs des côtés du polygone sont représentées, sur cette même figure 23, par les portions de ces mêmes obliques; mais elles sont comprises entre le point A et la perpendiculaire B'C', distante du point A d'une longueur représentée par AB', et égale à h.

[117] Les résultats ci-dessus sont applicables aux ponts suspendus d'une faible longueur; mais quand la portée augmente, les poids des tiges et des câbles, qui varient par mètre courant, développent dans les câbles de suspension des tensions qui s'écartent de celles que nous avons déterminées plus haut, en admettant une répartition uniforme du poids total. Dès lors la courbe d'équilibre se trouve modifiée, et elle diffère de la parabole en ce qu'elle est plus creusée que cette dernière près des culées; et cet accroissement dans la courbure des chaînes, qui est dû à l'influence du poids des tiges et des chaînes, est d'autant plus considérable que le poids des tiges et des chaînes est plus fort, relativement à celui du plancher du pont.

Si donc, les calculs ayant été établis pour un câble supposé parabolique,

(*) Le tracé de ce cas particulier dans lequel les poids sont égaux et équidistants sur l'horizontale, a été donné en 1829, sous une forme un peu différente de celle-ci, par M. Alphonse Bodson de Noirfontaine, capitaine du génie, dans un mémoire fort intéressant sur les ponts de cordages construits à Metz en 1827; mémoire qui a été inséré dans le *Mémorial des officiers du génie*.

Digitized by Google

on vient à poser un pont où l'influence des chaînes et des tiges sur la figure de la courbe ne peut pas être négligée, il en résultera que le tablier du pont, après la pose, se creusera près des culées, tandis qu'il se relèvera au milieu de sa longueur, au-dessus du niveau qu'il devait occuper d'après les dimensions résultant du calcul de la parabole.

Nous allons donc examiner, dans les pages suivantes, les conditions que doivent remplir les polygones des ponts suspendus à tiges équidistantes, en tenant compte des poids variables des tiges et des câbles de suspension.

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

Sect. 9. — De la forme du polygone d'équilibre des ponts suspendus, en tenant compte du poids des tiges et des câbles de suspension.

[118] Dans ce cas-ci chacun des sommets du polygone supporte, indépendamment du poids du tablier, que l'on suppose uniformément réparti :

1° Le poids de toute la portion de la chaîne comprise entre l'axe vertical du polygone et le milieu du côté qui est placé immédiatement au delà de ce sommet ;

2° Le poids de toutes les tiges placées sur le polygone à partir de l'axe vertical jusqu'au sommet en question, inclusivement.

[119] Si donc on pose :

1° P_n = la somme de tous les poids donnés qui agissent sur le plancher jusqu'au sommet n indépendamment du poids des câbles et des tiges ;

2° Γ_n = le poids de la portion de la chaîne qui agit sur ce même sommet ;

3° Θ_n = la somme du poids de toutes les tiges qui agissent aussi sur ce sommet n ;

4° Enfin Π_n = la somme de tous ces différents poids agissant sur le sommet n ;

Digitized by Google

Nous aurons :

$$\Pi_n = (P_n + \Gamma_n + \Theta_n). \qquad (70)$$

Ce poids est réellement celui qui agit au sommet n, et qui, par conséquent, *détermine* et la *tension* du côté qui commence immédiatement à ce sommet n et la *direction* de ce même côté.

Si donc on introduit cette expression du poids dans l'équation générale (9), en plaçant en facteur commun, la quantité h qui représente la distance entre deux tiges consécutives, il viendra :

$$V_n = \frac{h}{Q}[(P_1+\Gamma_1+\Theta_1)+(P_2+\Gamma_2+\Theta_2)+(P_3+\Gamma_3+\Theta_3)+\ldots\ldots+(P_{n-1}+\Gamma_{n-1}+\Theta_{n-1})] =$$
$$= \frac{h}{Q}[\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\ldots\ldots+\Pi_{n-1}]. \qquad (71)$$

Mais l'expression précédente peut encore se mettre sous une autre forme, qui nous permette de mieux saisir les influences de divers poids qui agissent sur la chaîne.

En groupant ensemble les poids de même nature, il vient :

$$V_n = \frac{h}{Q}\left\{\begin{array}{c}(P_1+P_2+P_3+\ldots\ldots+P_{n-1})+\\ +(\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\ldots\ldots+\Gamma_{n-1})+\\ +(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\ldots\ldots+\Theta_{n-1})+\end{array}\right\} \qquad (72)$$

La valeur de V_n est donc ramenée maintenant à une difficulté de sommation de poids.

[120] La première série entre parenthèses est $(P_1+P_2+P_3+\ldots\ldots+P_{n-1})$; elle se compose de poids égaux, comme dans le cas parabolique, et chaque expression P_n peut être représentée par

$$P_n = np. \qquad (73)$$

[121] *Le poids du câble* Γ_n offre assez de difficultés pour être évalué

Digitized by Google

avec exactitude, car la figure et la longueur du câble dépendent du poids de ce câble et réciproquement.

Or, ce que l'on cherche est précisément la forme de la courbe du câble, c'est-à-dire l'inconnue du problème. Il ne resterait donc qu'à exprimer cette courbe, et par conséquent le poids du câble, en fonction des données du problème, puis de substituer cette nouvelle expression dans celle du poids cherché; or cette marche, qui serait fort longue, qui exigerait des calculs très-pénibles, peut être abrégée si l'on fait attention qu'en général les poids des tiges et du câble étant assez faibles devant le poids total du plancher et de la surcharge, il est indifférent, en pratique, de prendre la courbe parabolique au lieu de la courbe réelle d'équilibre pour l'estimation du poids des câbles et des tiges.

[122] En partant de cette hypothèse que le câble est parabolique, les difficultés et les longueurs de calcul disparaissent, et l'expression de poids du câble se réduit à la longueur d'un arc parabolique multiplié par le poids de l'unité de longueur de ce câble. Or, la longueur de la courbe parabolique, mesurée à partir du point le plus bas jusqu'au sommet n, est, d'après ce que nous donne la formule (59),

$$L_n = \left[H_n + \frac{2}{3}\frac{V^2_n}{H_n}\right]. \qquad (74)$$

Mais cette expression de L_n en fonction de deux variables V_n et H_n, doit être modifiée de manière à ne contenir qu'une des coordonnées.

De l'équation (35), qui est

$$V_n = \frac{\pi}{2Q}(n^2 - n)h^2,$$

nous déduisons, pour la valeur du rapport $\frac{V^2_n}{H_n}$, en supposant $(n^2 - n)h^2 = H^2_n$,

$$\frac{V^2_n}{H_n} = \frac{\pi^2}{4Q^2}\frac{H^4_n}{H_n} = \frac{\pi^2 H^3_n}{4Q^2}; \qquad (75)$$

Digitized by Google

Mais l'équation ci-dessus, de V_n, fournit aussi l'expression suivante :

$$\frac{\pi^2}{4Q^2} = \frac{V^2_n}{H^4_n};$$

Ce rapport étant vrai pour tous les sommets n du polygone, il convient aussi au dernier sommet, dont les coordonnées sont V_N et H_N. Il vient alors :

$$\frac{\pi^2}{4Q^2} = \frac{V^2_N}{H^4_N}. \qquad (76)$$

Substituant cette dernière valeur dans l'équation (75), l'on obtient en dernier lieu :

$$\frac{V^2_n}{H_n} = \left(\frac{V^2_N H^3_n}{H^4_N}\right); \qquad (77)$$

Remplaçant ensuite, dans l'équation (74), le rapport $\frac{V^2_n}{H_n}$ par son équivalent trouvé ci-dessus (77), on a pour le résultat cherché :

$$L_n = \left(H_n + \frac{2}{3} \cdot \frac{V^2_N}{H^4_N} \cdot H^3_n\right). \qquad (78)$$

Comme on l'a vu plus haut, nous avons remplacé $(n^2 - n)h^2$ par H^2_n, qui est un peu plus faible que cette première valeur; mais comme l'erreur qui en résulte ne modifie pas d'une manière sensible, en pratique, les résultats qu'il s'agit d'obtenir, et qui sont ici les accroissements dans le poids des chaînes, correspondants aux augmentations de n, nous avons préféré la simplicité des formules à une rigueur qui est sans importance pratique. Par la même raison, en rétablissant les valeurs de H_n en fonction de la seule variable n, dans l'équation (78), nous poserons $H_n = nh$ et non pas $H_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)h$, qui est sa valeur exacte : attendu que le terme $\frac{1}{2}$ dans le facteur entre parenthèses, qui est très-faible devant n, a le grave inconvénient de compliquer la formule, sans compensation utile, au point de vue de l'application.

Digitized by Google

La formule (78) deviendra donc en définitive, et seulement pour le cas qui nous occupe,

$$L_n = \left[nh + \frac{2}{3}\frac{V^2_n}{H^4_n} n^3 h^3\right]. \tag{79}$$

Le poids Γ_n de cette portion de la chaîne sera, en désignant par γ le poids de l'unité de longueur de cette chaîne,

$$\Gamma_n = \gamma L_n = \gamma \left[nh + \frac{2}{3}\frac{V^2_n}{H^4_n} n^3 h^3\right]. \tag{80}$$

Telle est l'expression de Γ_n qui doit entrer dans l'expression (72), donnée plus haut, de l'ordonnée V_n du polygone réel d'équilibre.

Pour compléter cette expression, il ne nous reste plus qu'à y introduire la valeur Θ du poids des tiges, en fonction des données du problème.

[123] Soient (fig. 24) deux tiges voisines *ab*, *gh*, distantes l'une de l'autre de *h*, comme les autres tiges de suspension; supposons que cette tige *ab*, de cylindrique qu'elle est, se transforme par la pensée en une feuille de tôle, s'étendant, à droite et à gauche de son axe primitif de $\frac{h}{2}$, de sorte que cette feuille occupe une largeur *h* en conservant la hauteur primitive de la tige.

La surface *e*, *a*, *f*, *f'* *e'*, *e* de cette feuille de tôle sera équivalente à la surface *c*, *a*, *d*, *d'*, *b*, *c'*, *c* comprise entre les milieux des deux intervalles qui séparent la tige *ab* de ses deux voisines. Nous disons équivalente, parce que les deux arcs de courbe *cd*, *c'd'* qui passent par les deux extrémités de la tige en question, peuvent être considérés comme deux droites. Si maintenant on désigne par ω le poids du mètre courant de la tige de suspension, le poids d'une tige sera égale à la longueur de cette tige multipliée par le poids de l'unité de longueur, ou à

$$(V_n + f_n + D)\omega; \tag{81}$$

et si l'on représente par ω' le poids du mètre carré de tôle qui résulterait

Digitized by Google

du laminage de la tige, celle-ci conservant toute sa longueur primitive dans le laminage et produisant une feuille d'épaisseur homogène, dont la largeur serait égale à h, l'on aura, comme la tige n'aura pas changé de poids pendant l'opération,

$$(V_n + f_n + D)\omega = (V_n + f_n + D)\, h \times \omega'. \qquad (82)$$

Le même raisonnement étant appliqué à chacune des tiges, on voit que le poids de toutes les tiges sera égal à la surface comprise entre les deux courbes, inférieure et supérieure, et les deux lignes passant chacune à $\frac{h}{2}$ des tiges extrêmes, multipliées par le poids ω' du mètre carré d'une surface de tôle obtenue comme nous venons de l'indiquer.

En désignant par S cette surface, l'on aura pour le poids total des tiges, que nous représenterons par Ω',

$$S\omega' = \Omega'. \qquad (83)$$

Or la surface cherchée est sensiblement celle que limiteraient deux paraboles, celle du plancher pouvant être parabolique, et la courbe réelle d'équilibre pouvant être remplacée dans le cas qui nous occupe par une parabole. Mais on sait que la surface comprise entre la parabole et l'axe des x est égal au $\frac{1}{3}$ du rectangle construit sur ses coordonnées. Donc (fig. 25), d'après ce que nous venons de dire, la surface totale OBB'O' a pour mesure :

$$\left(\frac{1}{3}\,XY + XD + \frac{1}{3}\,XF.\right) = \left[\frac{1}{3}\,X\,(Y+F) + XD\right], \qquad (84)$$

et par conséquent le poids total des tiges deviendra :

$$\left[\frac{1}{3}\,X\,(Y+F) + XD\right]\omega' = \Omega'. \qquad (85)$$

Comme ici la partie du poids total, représentée par ($XD\omega'$) est constante,

Digitized by Google

on peut la faire passer dans la série des poids P_n, qui font partie du plancher du pont, de sorte que le poids des tiges sera ramené à la partie seulement *variable*, et l'équation (83) deviendra, en désignant par Ω ce poids, variable avec la longueur du plancher,

$$\left(\frac{1}{3} X (Y+F) \omega'\right) = \Omega. \tag{86}$$

La valeur du poids du même carré de tôle résultant du laminage des tiges sera

$$\omega' = \frac{\Omega}{\frac{1}{3} X (Y+F)}. \tag{87}$$

Pour une surface correspondante aux coordonnées y, x et f, le poids des tiges serait

$$\frac{1}{3} x (y+f) \omega' = \frac{\frac{1}{3} x (y+f) \Omega}{\frac{1}{3} X (Y+F)} = \Omega_n. \tag{88}$$

Mais dans la parabole on a aussi, en observant que, dans ce cas où l'axe est vertical, les x deviennent les y des formules ordinaires, et réciproquement,

$$x^2 = ay, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{x^2}{a} \quad \text{et} \quad a = \frac{x^2}{y}.$$

Ce rapport a existe pour tous les points de la courbe et par conséquent est vrai aussi à la limite pour laquelle $x = H_n$, $y = V_n$; donc

$$a = \frac{H^2_n}{V_n},$$

et, par conséquent,

$$y = \frac{V_n x^2}{H^2_n}$$

pour la courbe supérieure, celle que forment les chaînes de suspension.

Digitized by Google

Et, par analogie,

$$f = \frac{Fx^2}{H^2_n}$$

pour la courbe inférieure du plancher.

F désignant ici la flèche totale de courbure du plancher;

$V_n = Y$, la flèche de la chaîne de suspension;

Et $H_n = X$, la demi-corde de la chaîne de suspension, qui est aussi égale à la demi-longueur du plancher du pont.

Remplaçant, dans l'équation (88), y et f par leurs valeurs, que nous venons de déterminer à l'instant, il vient :

$$\Omega_n = \frac{x\left(\frac{V_n x^2}{H^2_n} + \frac{Fx^2}{H^2_n}\right)\Omega}{H_n(V_n + F)} = \frac{x^3}{H^3_n}\Omega. \qquad (89)$$

En effet, quand $x = H_n$, le poids Ω_n devient égal au poids total; ce qui devait être.

Mais pour introduire cette valeur dans notre formule, il est nécessaire de mettre le numéro de la tige en évidence, car il ne faut pas oublier que c'est sur un polygone que nous opérons et non pas sur une courbe. Si donc on pose :

$$x^3 = n^3 h^3,$$

on aura :

$$\Omega_n = \frac{n^3 h^3}{H^3_n}\Omega. \qquad (90)$$

Ce rapport doit être égal à l'unité quand n indique le numéro de la dernière tige.

[124] L'expression (72), qui est celle de la valeur d'une tige du nouveau polygone, deviendra, en y remplaçant les trois séries dont se compose le second membre, par leurs valeurs tirées de (73) pour la première, de (80) pour la deuxième, et enfin de (90) pour la troisième;

Digitized by Google

Cette expression (72) deviendra donc, disons-nous,

$$V_n = \frac{h}{Q}\left\{\begin{array}{l} p\,[1+2+3+4+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(n-1)]+ \\ +\gamma h\,[1+2+3+4+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(n-1)]+ \\ +\dfrac{2\gamma V^2_n}{3H^4_n}\,h^3\,[1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots\ldots+(n-1)^3]+ \\ +\dfrac{\Omega h^3}{H^3_n}\,[1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(n-1)^3] \end{array}\right\} \quad (91)$$

Pour obtenir la valeur de V_n, il faudrait maintenant effectuer les sommations ci-dessus. Pour cela, représentons comme précédemment par

$$\Sigma^{n-1}(a)$$

la somme de tous les termes dans lesquels (a) prend toutes les valeurs *depuis zéro* jusqu'à $(n-1)$ *inclusivement.*

Faisons, de plus,

$$\left.\begin{array}{c} (p+\gamma h)=A, \\ \dfrac{2\gamma V^2_n}{3H^4_n}+\left(\dfrac{\Omega}{H^3_n}\right)h^2=Bh^3, \end{array}\right\} \quad (92)$$

il viendra, pour l'équation (91) simplifiée,

$$V_n = \frac{h}{Q}\,[A\Sigma^{n-1}(n)+Bh^2\Sigma^{n-1}(n^3)]. \quad (93)$$

Et, en effectuant les sommations partielles,

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma^{n-1}(n)=\dfrac{n^2-n}{2}, \\ \Sigma^{n-1}(n^3)=\dfrac{n^4-2n^3+n_2}{4}; \end{array}\right\} \quad (94)$$

l'on obtient :

Digitized by Google

$$V_n = \frac{h}{Q}\left[A\left(\frac{n^2-n}{2}\right) + Bh^3\left(\frac{n^4-2n^3+n^2}{4}\right)\right]. \qquad (95)$$

Telle est l'expression (95) de la valeur d'une ordonnée du *polygone réel* d'équilibre.

[125] En ordonnant, par rapport à la variable n, on aurait une équation à quatre termes; par conséquent qui exigerait quatre opérations pour fournir la valeur numérique d'une ordonnée.

Mais cette équation qui, à la rigueur, devrait être employée pour faire connaître les ordonnées des sommets du polygone *réel d'équilibre*, est un peu compliquée pour les besoins ordinaires de la pratique : c'est pourquoi nous allons lui faire subir une transformation qui la simplifiera en la réduisant à des termes, dont le calcul est très-abordable, surtout si l'on emploie les procédés graphiques que nous avons déjà indiqués plus haut, et sur lesquels nous nous proposons de revenir avec plus de détails dans la suite.

Pour simplifier cette équation (95), remarquons que, rien ne limitant la valeur de h, on peut faire passer cette quantité par tous les états de grandeur; seulement, quand h deviendra infiniment petit, n deviendra infiniment grand, et le polygone s'effacera pour faire place à une courbe qui sera tangente à l'élément horizontal du polygone fourni par une valeur finie de h.

Ce sera donc une courbe au lieu d'un polygone. Et comme cette courbe ne diffère pas sensiblement du polygone, dans les applications où la valeur de h s'écarte peu de l'unité, on pourra prendre pour ordonnées du polygone celles correspondantes sur la courbe.

[126] Au lieu de remplacer les coordonnées du *polygone réel* d'équilibre par les coordonnées correspondantes de la *courbe réelle* d'équilibre, on peut employer une autre méthode tirée des considérations suivantes :

Les différences entre les ordonnées de la parabole et de la *courbe réelle* d'équilibre sont, à très-peu de chose près, égales aux différences correspondantes entre les ordonnées du polygone parabolique construit avec la

Digitized by Google

valeur donnée de h et les ordonnées correspondantes du polygone réel d'équilibre.

Si donc, après avoir calculé les ordonnées du polygone parabolique, fonction de h, on ajoute avec leurs signes les différences qui existent entre les ordonnées de la parabole et celles de la *courbe réelle* d'équilibre, on sera certain d'avoir les ordonnées du *polygone réel* d'équilibre, avec toute l'exactitude désirable.

Nous examinerons successivement les deux méthodes :

1° En calculant directement les ordonnées de la *courbe réelle* d'équilibre ;

2° En calculant séparément et les ordonnées du *polygone* parabolique et les différences entre la parabole et la *courbe réelle* d'équilibre.

Ajoutant ensuite chaque *ordonnée* avec la *différence* correspondante, on aura l'ordonnée correspondante du *polygone réel* d'équilibre.

[127] Reprenons l'équation (95), et ordonnons par rapport à n; il viendra :

$$V_n = \frac{h}{4Q}\,[Bh^3 . n^4 - 2Bh^3 . n^3 + (Bh^3 + 2A)\,n^2 - 2A\,.\,n]. \qquad (96)$$

Posant ensuite pour abréger :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{Bh^4}{4Q}\right) &= A_1 \\ \left(\frac{Bh^4}{2Q}\right) &= B_1 \\ \left(\frac{Bh^4}{4Q} + \frac{Ah}{2.Q}\right) &= C_1 \\ \left(\frac{Ah}{2Q}\right) &= D_1 \end{aligned}\right\} \qquad (97)$$

l'équation (96), simplifiée dans sa forme, sera la suivante :

$$V_n = [A_1 n^4 - B_1 n^3 + C_1 n^2 - D_1 n]. \qquad (98)$$

Résoudre directement cette équation serait un moyen trop long et trop

Digitized by Google

fatigant, que l'ingénieur aurait rarement le loisir d'employer; aussi, dans l'application, conseillons-nous de ne *calculer directement* que les *coefficients*, et ensuite de *déduire par le calcul graphique* toutes les valeurs des différents termes du second membre.

La seule objection que l'on pourrait faire à l'emploi de ce procédé serait dans la grandeur des dimensions de l'épure, dont il faudrait disposer pour y tracer quatre triangles, dont les côtés devraient avoir des longueurs assez considérables.

Or nous allons faire voir que, de ces quatre épures, une seule doit être obtenue à une grande échelle (grandeur d'exécution, autant que possible), et les trois autres peuvent se réduire à de simples tracés, ne dépassant pas les dimensions d'une feuille de papier ordinaire.

Pour cela, mettons en évidence la grandeur relative des coefficients.

Nous avons, d'après les équations (97) et (92) :

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \left(\frac{h^4}{4Q}B\right) = \left[\frac{h^4}{4Q}\left\{\left(\frac{2\gamma V^2_{\pi}}{3H^4_{\pi}}\right) + \frac{\Omega}{H^2_{\pi}}\right\}\right] \\
B_1 &= \left(\frac{h^4}{2Q}B\right) = \left[\frac{h^4}{2Q}\left\{\left(\frac{2\gamma V^2_{\pi}}{3H^4_{\pi}}\right) + \frac{\Omega}{H^2_{\pi}}\right\}\right] \\
C_1 &= \left(\frac{h^4}{4Q}\right)B + \left(\frac{h}{2Q}\right)A = \left[\frac{h^4}{4Q}\left\{\left(\frac{2\gamma V^2_{\pi}}{3H^4_{\pi}}\right) + \left(\frac{\Omega}{H^2_{\pi}}\right)\right] + \frac{h}{2Q}(p+\gamma h)\right\} \\
D_1 &= \left(\frac{h}{2Q}A\right) = \left\{\frac{h}{2Q}(p+\gamma h)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (99)$$

[128] Or, maintenant faisons une évaluation approchée des plus grandes valeurs relatives que puissent prendre les termes de l'équation (98).

[129] Premier terme $A_1 n^4$.

Multiplions la valeur du coefficient A_1 tiré des équations (99) par n^4 :

$$A_1 n^4 = \left[\frac{n^4 h^4}{4Q}\left\{\left(\frac{2\gamma V^2_{\pi}}{3H^4_{\pi}}\right) + \left(\frac{\Omega}{H^2_{\pi}}\right)\right\}\right] \qquad (100)$$

Digitized by Google

Comme il ne s'agit ici que d'approximation, prenons, pour abréger et afin de mieux faire ressortir les influences des divers symboles :

$$n^4 h^4 = H^4_n,$$

ce qui s'écarte assez peu de la vérité dans les cas ordinaires où H_n est très-grand devant h.

On aura :

$$A_1 n^4 = \left[\left(\frac{\gamma V^2_n}{6Q}\right) + \left(\frac{H_n \Omega}{4Q}\right)\right] = \left\{\left(\frac{V^2_n}{6}\ \frac{\gamma}{Q} + \frac{H_n}{4}\ \frac{\Omega}{Q}\right)\right\}. \qquad (a)$$

Or, dans la pratique, γ qui est le poids du mètre courant de câble, est assez faible, relativement à la composante horizontale Q.

Il en est de même, du poids Ω, de toutes les tiges de suspension.

Pour fixer les idées, prenons les moyennes numériques suivantes :

Q = composante horizontale de tension = 2,6P ; en représentant par P le poids total du pont :

$$\left.\begin{array}{lll} \gamma = \frac{P}{300} & \text{dans un pont ordinaire.} & \\ \Omega = \frac{P}{6} & \textit{id.} & \\ V_n = 8^{\text{mèt.}},00 & \textit{id.} & \\ H_n = 50^{\text{mèt.}},00 & \textit{id.} & \\ p = 1200^{\text{k.}} & \textit{id.} & \\ P = 60'000^{\text{kil.}} & \textit{id.} & \\ h = 1^{\text{mèt.}},00 & \textit{id.} & \end{array}\right\} \qquad (b)$$

Chiffres dont les valeurs relatives sont suffisamment exactes pour donner une idée de l'influence de chacun des termes de l'équation (98) sur la valeur définitive de l'ordonnée V_n.

L'équation (*a*) devient

Digitized by Google

$$A_1 n^4 = \left\{\left(\frac{V^2_N P}{6\times 300\,Q}\right) + \left(\frac{H_N P}{4Q\times 6}\right)\right\} = \left(\frac{V^2_N}{6\times 300\times 2{,}6}\right) + \left(\frac{H_N}{4\times 6\times 2{,}6}\right) =$$
$$= \left\{\left(\frac{64}{4680}\right) + \left(\frac{50}{62{,}4}\right)\right\} \qquad (c)$$

Ainsi donc, dans les cas ordinaires que présente l'application, la valeur du terme $n^4 A_1$ étant plus petite que l'unité, à son maximum, permettra d'en déterminer toutes les valeurs au moyen d'une épure tracée sur une feuille de papier ordinaire.

Nous ferons voir bientôt comment il est possible d'obtenir la plus grande partie des valeurs de ce terme par une simple interpolation graphique, exécutée au moyen de quelques valeurs de $n^4 A_1$ déterminées directement.

[130] Prenons maintenant le deuxième terme $-B_1 n^3$.

L'expression de B_1 donnée (99) étant multipliée par n^3 devient :

$$B_1 n^3 = n^3 h^3 \left\{\frac{h}{2Q}\left(\frac{2\gamma V^2_N}{3H^4_N} + \frac{\Omega}{H^3_N}\right)\right\}, \qquad (d)$$

Et en simplifiant les symboles, et les remplaçant par leurs valeurs numériques, on obtient :

$$B_1 n^3 = \frac{h}{2Q}\left(\frac{2}{3}\frac{\gamma V^2_N}{H_N} + \Omega\right) = \left(\frac{\gamma V^2_N}{3QH_N} + \frac{\Omega}{2Q}\right) = \left(\frac{64}{117000} + \frac{1}{31{,}20}\right), \qquad (e)$$

valeur évidemment très-faible, et que l'on pourra encore obtenir par les procédés graphiques appliqués à une épure tracée sur une feuille de papier ordinaire.

Passons maintenant au troisième terme.

[131] Troisième terme $C_1 n^2$.

L'expression du coefficient de ce terme, donnée (99), est celle-ci, après l'avoir multipliée par n^2.

$$n^2 C_1 = \left[n^2 h^2 \left\{\frac{h^2}{4Q}\left(\frac{2}{3}\frac{\gamma V^2_N}{H^4_N} + \frac{\Omega}{H^3_N}\right)\right\} + \frac{h}{2Q}\,(p + \gamma h)\, n^2\right]. \qquad (f)$$

Digitized by Google

En examinant avec attention la valeur de ce coefficient de n^2, on s'aperçoit qu'il est composé de deux termes, dont l'un est très-grand, relativement à l'autre : en réduisant, il vient, en effet, pour $nh = H_n$, à la limite pratique :

$$n^2 C_1 = \left[\frac{h^3}{4Q}\left(\frac{2}{3}\frac{\gamma V^2_n}{H^3_n} + \frac{\Omega}{3H_n}\right) + \frac{H_n}{2Q}(P + \gamma H_n)\right]. \qquad (g)$$

Remplaçant et réduisant, on obtient :

$$n^2 C_1 = \left\{\left(\frac{64}{11700000} + \frac{1}{8120}\right) + \left(\frac{50}{5,2} + \frac{2500}{1560}\right)\right\}. \qquad (h)$$

Donc, le premier terme, entre parenthèse, est beaucoup plus faible que le second.

[132]. Si l'on emploie ici la méthode de solution graphique qui a été indiquée par les autres termes en n^4 et n^3, on voit qu'il faudra une grande épure à cause de la grandeur du second terme. Pour l'isoler, reprenons le coefficient C_1 et posons :

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= (c' + c'') \\ \text{Et } c' &= \frac{h^4}{4Q}\left(\frac{2\gamma V^2_n}{3H^4_n} + \frac{\Omega}{H^3_n}\right) \\ c'' &= \frac{h}{2Q}(p + \gamma h) \end{aligned}\right\} \qquad (i)$$

nous aurons

$$n^2 C_1 = n^2 c' + n^2 c'' = \left[n^2 \frac{h^4}{4Q}\left(\frac{2\gamma V^2_n}{3H^4_n} + \frac{\Omega}{H^3_n}\right) + \frac{n^2 h}{2Q}(p + \gamma h)\right]. \qquad (d)$$

Le dernier terme, entre parenthèse, est égal au facteur de n du quatrième terme de l'équation générale (98) ; de sorte que, si nous combinons les deux derniers termes de l'équation générale, il viendra, en faisant attention qu'ici $c'' = D_1$, ou le coefficient du quatrième terme de l'équation générale :

Digitized by Google

$$(C_1 n^2 - D_1 n) = (c' n^2 + D_1 n^2 - D_1 n) = c' n^2 + D_1 (n^2 - n). \qquad (l)$$

Sous cette nouvelle forme, on voit qu'il sera possible de résoudre encore, par le moyen d'une épure graphique de peu d'étendue, le terme $c'n^2$.

Quant au terme $D_1(n^2 - n)$, il donne la plus grande valeur de l'épure, puisque ce terme $D_1(n^2 - n)$ a pour valeur, à la limite :

$$D_1 (n^2 - n) = \left[\left(\frac{50}{5,2} + \frac{50}{31,2}\right) - \left(\frac{1}{5,2} + \frac{1}{31,20}\right)\right]. \qquad (m)$$

valeur relativement très-grande.

[133] C'est donc ce terme $D_1(n^2 - n)$, dont il faudra construire toutes les valeurs à une grande échelle, grandeur d'exécution, si rien ne s'y oppose.

Pour cela, rétablissons la valeur du coefficient dans ce terme $D_1(n^2 - n)$, qui devient alors :

$$\frac{h}{2Q} (p + \gamma h) (n^2 - n). \qquad (o)$$

On voit qu'il est identique à l'expression de l'ordonnée parabolique (34), dans laquelle expression, p deviendrait $(p + \gamma h)$: ce qui veut dire, en d'autres termes, que le poids total de l'équation (0) se compose d'abord du poids p du plancher compris dans la longueur h, lequel poids est augmenté de celui d'une portion de chaîne égale aussi à l'intervalle h qui sépare les tiges.

Ce terme (0) est donc le terme principal, et les autres indiquent les modifications que font subir aux ordonnées paraboliques les poids variables des tiges et des chaînes.

Quant aux termes $n^4 A_1$, $n^3 B_1$ et $n^2 c'$ ou $n^2(C_1 - D_1)$, dont les valeurs sont très-peu considérables, elles s'obtiendront, avec toute l'exactitude désirable, au moyen d'épures tracées dans le cabinet sur des feuilles de papier de dimensions ordinaires.

Dans la seconde partie de ce travail, qui contiendra, sous forme d'aide-mémoire, un résumé des formules que nous établissons ici, nous ferons

Digitized by Google

voir combien les solutions de ces formules deviennent simples et faciles par la méthode de calcul mixte, se composant du calcul direct et du tracé graphique pour les valeurs équidistantes de n', comprenant entre elles un certain nombre d'ordonnées, dont les longeurs se détermineront ensuite par une interpolation graphique.

[134] Passons maintenant à l'examen de la *courbe réelle* d'équilibre, que l'on peut, dans certains cas, substituer au *polygone réel* d'équilibre.

Pour cela, reprenons l'équation (93).

Cette équation, étant vraie pour toutes les grandeurs de h, doit encore subsister quand h prend une valeur infiniment petite, cas auquel le polygone se transforme en une courbe.

Mais, pour faire varier h dans l'équation (93) et apprécier son influence sur les termes de l'équation générale, il faut mettre en évidence, non-seulement ce symbole, mais encore la lettre n dont la valeur est liée à celle de h, par cette condition que l'une varie en sens inverse de l'autre.

[135] La forme courbe supposant, indépendamment de la flexibilité de la chaîne, une répartition non interrompue du poids total, il faut remplacer le poids p, qui renferme implicitement h, par cette expression équivalente $\pi h = p$, en appelant π le poids réparti par mètre courant de l'horizontale.

L'équation (93) deviendra donc alors, en faisant rentrer le facteur h dans la parenthèse, et en remplaçant A par la valeur (92)

$$V_n = \frac{1}{Q} \left[(\pi + \gamma) h^2 \Sigma^{n-1} (n) + B h^4 \Sigma^{n-1} (n)^3 \right]. \qquad (101)$$

Cette équation est encore celle des ordonnées du polygone; mais si, après avoir effectué les sommations qu'elle indique, on fait disparaître tous les termes où h n'est pas engagé avec n au même degré, on aura remplacé le polygone par une courbe ou par un polygone dont les côtés sont infiniment petits.

Digitized by Google

Remarquons, comme nous avons déjà eu occasion de le faire au sujet du polygone parabolique, qu'un terme quelconque de la forme

$$h^{\alpha+1}\,\Sigma^{n-1}\,(a)^{\alpha},$$

devient, après la sommation :

$$\frac{h^{(\alpha+1)}\,n^{(\alpha+1)}}{\alpha+1}+\frac{h^{(\alpha+1)}\,n^{\alpha}}{\beta}+\frac{h^{(\alpha+1)}\,n^{(\alpha-1)}}{\delta}+\text{etc.}$$

Si l'on fait décroître h indéfiniment, il vient :

$$hn=x,$$

et l'expression précédente se transformera en celle-ci :

$$h^{(\alpha+1)}\,\Sigma^{n-1}\,(a)^{\alpha}=\frac{x^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)}+\frac{hx^{\alpha}}{\beta}+\frac{h^{2}x^{(\alpha-1)}}{\delta}+\text{etc.}$$

Mais h, étant infiniment petit, fait disparaître les termes où il entre comme facteur, et il vient en dernier lieu :

$$h^{\alpha+1}\,\Sigma^{n-1}\,(a)^{\alpha}=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Ce raisonnement étant appliqué à tous les termes de la formule (101), il vient pour l'expression de l'ordonnée V_x, en désignant par x l'abscisse correspondante à cette ordonnée,

$$V_x=\frac{1}{Q}\left[(\pi+\gamma)\frac{x^{2}}{2}+B\frac{x^{4}}{4}\right]. \qquad (102)$$

Ainsi la considération de h infiniment petit a fait évanouir deux termes du second membre de l'équation du polygone.

Digitized by Google

Telle est (102) l'équation de la courbe réelle d'équilibre.

[136] Pour les besoins de la pratique, il faut obtenir les valeurs de V_x pour des accroissements de x correspondants à h; c'est-à-dire que si l'on pose :

$$x = \left(nh - \frac{h}{2}\right) = h\left(n - \frac{1}{2}\right),$$

l'abscisse x étant elle-même composée de deux facteurs, l'un h, qui est constant, l'autre n, qui croît par unité; l'on aura, au lieu de l'équation (102),

$$V_n = \frac{1}{Q}\left[(\pi + \gamma)\frac{h^2}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{Bh^4}{4}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right)^4\right], \qquad (103)$$

et, en remplaçant les coefficients par leur valeur,

$$V_n = \frac{1}{Q}\left[\left(\frac{\pi + \gamma}{2}\right)h^2\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\frac{\gamma V^2_n}{H^4_n} + \frac{\Omega}{4H^3_n}\right)h^4\left(n - \frac{1}{2}\right)^4\right]. \qquad (104)$$

Pour connaître les valeurs relatives des deux termes du second membre de cette dernière équation, supposons que n prenne la valeur du dernier sommet.

Dans cette dernière hypothèse,

$$h\left(n - \frac{1}{2}\right) = H_n,$$

et l'équation (104) se transforme en celle-ci :

$$V_n = \left[\left(\frac{\pi + \gamma}{2Q}\right)H^2_n + \left(\frac{1}{6Q}\gamma V^2_n + \frac{\Omega H_n}{4Q}\right)\right]. \qquad (105)$$

Or le premier terme du second membre est très-grand par rapport au dernier terme, qui ne renferme que le poids du mètre courant de câble et le poids total des tiges, tandis que le premier terme renferme, comme facteur, le poids total du pont et la plus grande partie du poids des chaînes.

Digitized by Google

Il sera donc permis, en pratique, de négliger $\frac{1}{2}$ devant n dans le facteur $\left(n-\frac{1}{2}\right)^4$. Et comme, dans le développement de $\left(n-\frac{1}{2}\right)^2=\left(n^2-n+\frac{1}{4}\right)$, le dernier terme $\frac{1}{4}$ est très-faible devant les deux autres termes (n^2-n), nous négligerons aussi ce dernier terme $\frac{1}{4}$ qui peut être omis sans inconvénient. Il vient alors, avec une exactitude suffisante pour les applications,

$$V_n=\frac{1}{Q}\left[\left(\frac{\pi+\gamma}{2}\right)h^2\left(n^2-n\right)+\left(\frac{\gamma V^2_n}{6N^4}+\frac{h\Omega}{4N^3}\right)n^4\right], \qquad (106)$$

en remplaçant H par Nh, et en désignant en outre par N le numéro du dernier sommet du polygone; celui qui a pour coordonnées V_n et H_n.

Équation dans laquelle la valeur de la composante horizontale Q doit satisfaire à la condition

$$Q=\frac{1}{V_n}\left[\left(\frac{\pi+\gamma}{2}\right)h^2(N^2-N)+\left(\frac{\gamma V^2_n}{6N^4}+\frac{h\Omega}{4N^3}\right)N^4\right]=$$
$$=\frac{1}{V_n}\left[\left(\frac{\pi+\gamma}{2}\right)h^2(N^2-N)+\left(\frac{\gamma V^2_n}{6}+\frac{h\Omega N}{4}\right)\right], \qquad (107)$$

en désignant toujours par N et par V_n le numéro et l'ordonnée du dernier sommet.

Cette valeur de Q, étant obtenue, sera placée dans l'équation (106), au moyen de laquelle on calculera alors les valeurs de toutes les ordonnées de la courbe réelle d'équilibre.

[137] Les valeurs de V_n s'obtiendront très-facilement par les moyens graphiques que nous avons indiqués plus haut, après que l'on aura déterminé, par le calcul, et les valeurs numériques des coefficients de l'équation (106) et les grandeurs des deux termes de cette même équation, pour une valeur de N correspondante au dernier sommet, dont l'ordonnée a été désignée par V_n.

Digitized by Google

Les courbes correspondantes se rétabliront ensuite en portant sur les ordonnées, passant par les différentes valeurs de n, les longueurs des ordonnées des deux droites tracées avec $(n^2 - n)$ et n^4 pour abscisses.

[138] Mais, au lieu de calculer directement ces ordonnées de la courbe réelle d'équilibre, on peut aussi déterminer d'abord les ordonnées du polygone parabolique, et ensuite retrancher les ordonnées de la *courbe des différences* obtenues, comme nous allons l'indiquer dans les pages suivantes.

[139] Pour cela, reprenons quelques-unes des considérations précédentes, afin de déterminer ce que nous devons entendre par courbe des différences.

[140] Prenons (fig. 26) un polygone a, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et N; N désignant le dernier sommet du polygone qui est ici le septième.

Tous les sommets de ce polygone, qui a V pour flèche et H pour demi-corde, sont situés sur une courbe qui passe en a_1, au-dessous du point a placé sur le côté horizontal du polygone, et à une distance de ce point a d'une quantité qui est fonction, non-seulement des coordonnées V et H, mais encore du côté h du polygone.

Cette quantité aa_1 peut se déduire de la formule qui donne les ordonnées du polygone, équation (34), et qui est :

$$V_n = \frac{ph}{2Q}(n^2 - n).$$

Puisque cette équation donne $V = 0$ pour $n = 0$, il faut en conclure que le centre des coordonnées est situé sur la courbe circonscrite au polygone et à une distance $\frac{h}{2}$ du point a : c'est-à-dire que cet axe est en A.

Si donc on fait $n = \frac{1}{2}$ dans l'équation ci-dessus, il vient :

$$V_{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{ph}{4Q}\right) = aa_1. \qquad (108)$$

Digitized by Google

Expression négative, et qui indique que le sommet de la courbe circonscrite au polygone passe à $\frac{ph}{4Q}$, en contre-bas du milieu du dernier élément horizontal.

Ainsi donc, quand on déterminera les ordonnées du polygone réel d'équilibre, en calculant d'abord les ordonnées du polygone parabolique, et en retranchant ensuite les ordonnées de la courbe des différences, il faudra prendre, pour établir la courbe des différences, une parabole ayant pour flèche $(V + aa_1) = {}^1V$ (fig. 26) et non pas V.

La courbe réelle d'équilibre sera aussi calculée avec la même flèche et la même demi-corde, qui serviraient à déterminer la parabole circonscrite au polygone, puisque cette courbe des différences doit couper l'axe des x en deux points, pour lesquels $x = 0$ et $x = H_n$.

Nous avons dit jusqu'à présent que les ordonnées de la courbe des différences devaient être retranchées des ordonnées paraboliques : ce qui revient à admettre *à priori* que la courbe réelle d'équilibre a ses ordonnées plus faibles que la courbe parabolique de même flèche et de même corde.

Cette hypothèse demande peut-être quelques développements pour être admise dans le sens que nous y attachons.

[141] Soit, fig. 27, une chaîne de pont suspendu a, m, n, d, c chargée d'un poids P distribué uniformément sur l'horizontale ac', qui représente le plancher du pont. Ce poids P agissant seul, et les tiges et les chaînes étant soustraites à l'action de la pesanteur par hypothèse, la chaîne affectera une forme parabolique.

Si, dans cet état, on restitue aux chaînes et aux tiges de suspension leur poids primitif, a, m, n, d, c se modifiera sous l'action des chaînes et des tiges dont le poids, au lieu de croître seulement avec l'abscisse comme dans la parabole, augmente dans une proportion beaucoup plus forte, qui peut être représentée par le cube de cette même abscisse.

Cette surcharge de poids, qui croît d'autant plus rapidement qu'elle se

Digitized by Google

rapproche davantage du haut de la courbe, produit donc vers le haut de la chaîne un affaissement d'autant plus sensible que le poids des câbles et des tiges est plus grand, par rapport à celui que l'on suppose uniformément réparti sur le plancher du pont, et auquel était due la forme parabolique.

Et si cette courbe peut se modifier dans sa longueur (*), de manière à devenir tangente de l'horizontale ac', elle affectera la forme a, m_1, n_1, d_1, c, fig. 27, et les tiges de suspension du câble parabolique, qui s'arrêtaient à l'horizontale ac', descendront inégalement avec les différents points du câble au-dessous de cette même ligne, en décrivant, par les extrémités, la ligne courbe $ad'c'$.

C'est cette courbe a, m', n', d', c' qui porte le nom de *courbe des différences*; elle a pour ordonnées les portions de droites comprises entre la courbe a, m', n', d', c' et l'horizontale ac'; c'est-à-dire les différences entre les ordonnées paraboliques et celles de la *courbe réelle d'équilibre*, puisque l'on peut admettre, sans trop s'éloigner de la vérité, que, pendant la transformation de la courbe adc en la courbe ad_1c, les tiges sont descendues en suivant les verticales qu'elles occupaient avant la transformation de la courbe.

[142] Si donc on calcule séparément les ordonnées paraboliques comprises entre la courbe a, m, n, d, c et l'horizontale ac', et si de ces longueurs on retranche celles qui sont comprises entre la courbe des différences a, m', n', d', c' et l'horizontale ac', on obtiendra les ordonnées de la *courbe réelle* d'équilibre a, m_1, n_1, d_1, c : ordonnées qui sont comprises entre cette courbe réelle d'équilibre et l'horizontale ac'.

(*) Pour simplifier la question, nous avons admis ici que le câble parabolique s'allongeait pendant sa transformation. Cette hypothèse est assez conforme à ce qui se passe après la pose, puisque le câble, en se tendant sous la charge du pont, augmente de longueur; seulement, le coefficient de cet allongement, qui dépend d'une foule de circonstances, ne peut être déterminé exactement. Si l'on supposait au câble une longueur constante, il faudrait alors tenir compte du relèvement de la chaîne en son milieu, par suite de l'affaissement de la courbe vers les culées. Alors la partie de la courbe $a'm'_1n'_1d'c'$ se relèverait au-dessus de l'horizontale dans sa partie a d'une quantité égale à la différence des flèches des deux courbes a, m, n, d, c, a, m', n', d, c; dont les longueurs alors resteraient les mêmes.

Digitized by Google

Or nous savons calculer la parabole ayant pour coordonnées extrêmes V (*) et H. Occupons-nous maintenant de déterminer et le caractère et les ordonnées de cette courbe des différences.

Pour cela, reprenons l'équation fondamentale (71) :

$$V_n = \frac{h}{Q}(\Pi_1 + \Pi_2 + \ldots\ldots + \Pi_{n-1})$$

qui donne la valeur d'une ordonnée en fonction des accroissements v_n ayant pour mesure :

$$v_n = \frac{h}{Q}\Pi_n ,$$

comme nous l'avons indiqué (fig. 8) et paragraphe correspondant.

Mais le poids Π_n est lui-même composé du poids uniforme du plancher et du poids variable des câbles et des tiges, et son expression de (73) (80) et (90) est :

$$\Pi_n = + (P_n + \Gamma_n + \Theta_n) = \left[np + \gamma nh + \frac{2}{3}\frac{V^2_n}{H^4_n}\gamma n^3h^3 + \frac{\Omega}{H^3_n}n^3h^3\right]. \quad (109)$$

L'accroissement de la tige V_n sur la tige V_{n+1} sera donc exprimé par

$$(V_{n+1} - V_n) = v_n = \frac{h}{Q}\left(np + \gamma nh + \frac{2}{3}\frac{V^2_n}{H^4_n}\gamma h^3n^3 + \frac{\Omega n^3h^3}{H^3_n}\right). \quad (110)$$

Si maintenant on désigne par $'v_n$ l'accroissement de la tige V_{n+1} sur la tige V_n, dans le *polygone parabolique* ayant même flèche et même demi-corde que le polygone réel d'équilibre, on aura :

$$'v_n = \frac{np_1h}{Q}, \quad (111)$$

(*) Rappelons encore ici ce que nous avons dit tout à l'heure au sujet des deux courbes a, m, n, d, c et a, m_1, n_1, d_1, c, fig. 27. Si le câble a, m, n, d, c était inextensible, il ne changerait pas de longueur dans la transformation, et, dès lors, les flèches des deux courbes seraient différentes. Dans ce cas, la flèche de la parabole devrait être déduite de la longueur de son arc, dont le développement est égal à celui de la courbe réelle d'équilibre.

Digitized by Google

en conservant ici à Q la même composante horizontale que dans l'équation (110), et en désignant par p_1, le poids moyen qui satisfait l'équation (111).

Mais nous avons, fig. 27,

$$mm_1 = m'_1 m'$$
$$nn_1 = n'_1 n'$$

Ce qui veut dire que les différences entre les coordonnées des deux courbes, la parabole et la courbe réelle d'équilibre, sont égales aux ordonnées correspondantes de la courbe des différences. Par conséquent, l'*accroissement n'o* de deux ordonnées consécutives de la courbe des différences est égale à la *différence des différences* des ordonnées correspondantes des deux courbes primitives a, m, n, d, c et a, m_1, n_1, d_1, c.

En désignant par ${}^2v_n$ ces accroissements *n'o* de la courbe des différences, et en se rappelant que nous avons désigné par v_n et ${}^1v_n$ les différences entre les ordonnées V_{n+1} et V_n dans la courbe réelle et dans la parabole, il vient :

$$(v_n - {}^1v_n) = {}^2v_n = \frac{h}{Q}\left[(p + \gamma h - p_1)n + \left(\frac{2}{3}\frac{V^2_n}{H^4_n}\gamma h^3 + \frac{\Omega h^3}{H^3_n}\right)n^3\right]. \quad (112)$$

Et en posant :

$$\left.\begin{aligned} \frac{h}{Q}(p + \gamma h - p_1) &= {}^1A \\ \frac{h}{Q}\left(\frac{2}{3}\frac{V^2_n}{H^4_n}\gamma h^3 + \frac{\Omega h^3}{H^{n3}}\right) &= {}^1B \end{aligned}\right\}, \quad (113)$$

l'équation (112) qui donne l'accroissement de l'ordonnée de la courbe des différences se réduit à

$${}^2v_n = {}^1An + {}^1B\,n^3 \quad (114)$$

en prenant, bien entendu, les termes avec les signes qu'ils reçoivent de leurs coefficients.

Digitized by Google

Or ici, le coefficient 'A est négatif, comme il est facile de s'en assurer par les considérations suivantes.

L'équation du polygone parabolique est (34) :

$$V_n = \frac{p'h}{2Q_1}(n^2 - n),$$

et en posant

$$\frac{p'}{Q_1} = \frac{p_1}{Q}, \tag{115}$$

afin de pouvoir exprimer l'équation du polygone parabolique en fonction de la composante horizontale Q des tensions de la courbe réelle d'équilibre, il vient :

$$V_n = \frac{p_1 h}{Q}\left(\frac{n^2 - n}{2}\right). \tag{116}$$

L'équation du polygone réel d'équilibre est (95), en désignant par K le second terme du second membre :

$$V_n = \frac{h}{Q}\left[(p + \gamma h)\left(\frac{n^2 - n}{2}\right) + K\right]. \tag{117}$$

A la limite du polygone, quand n représente la valeur de son dernier sommet N du polygone, les ordonnées des deux polygones deviennent égales, et l'on obtient, en égalant (117) à (116), et réduisant :

$$\frac{p_1}{Q}\left(\frac{N^2 - N}{2}\right)h = \left(\frac{p + h\gamma}{Q}\right)\left(\frac{N^2 - N}{2}\right)h + K\frac{h}{Q}$$

ou encore :

$$\frac{p_1}{Q} = \left(\frac{p + h\gamma}{Q}\right) + \frac{2K}{(N^2 - N)Q}, \tag{118}$$

d'où il est facile de conclure que le rapport $\frac{p_1}{Q}$ est plus grand que le

Digitized by Google

rapport $\left(\frac{p+\gamma h}{Q}\right)$, puisque le second terme du second membre est positif.

Il s'ensuit donc que, dans l'équation (114), le coefficient ^1A sera négatif, et que l'on aura en dernier lieu pour l'accroissement de l'ordonnée de la courbe des différences, et en tenant compte des signes :

$$^2v_n = (-{}^1An + {}^1Bn^3), \qquad (119)$$

ou en rétablissant les coefficients :

$$^2v_n = \left[-\frac{h}{Q}(p + h\gamma - p_1)\,n + \frac{h^4}{Q}\left(\frac{2}{3}\frac{V^3_n}{H^4_n}\gamma + \frac{\Omega}{H^3_n}\right)n^3\right]. \qquad (120)$$

Telle est, en dernier lieu, l'expression des *accroissements* ou des *différences* des ordonnées de la *courbe des différences :* expression qu'il s'agit de traduire linéairement, afin d'en déduire, par des procédés graphiques, la valeur des ordonnées de cette courbe.

[143] Si nous représentons toujours par ^2V_n une ordonnée de cette courbe, nous aurons :

$$^2V_n = \Sigma^{n-1}\,{}^2v_n = [-{}^1A\,\Sigma^{n-1}(n) + {}^1B\,\Sigma^{n-1}(n^3)] \qquad (121)$$

Et en faisant la somme de toutes les valeurs de n, et passant à la limite par l'évanouissement des valeurs de h qui sont engagées implicitement dans les coefficients, on obtient, non plus pour le polygone des différences, mais pour la courbe des différences :

$$^2V_n = \left(-{}^1A\frac{n^2}{2} + {}^1B\frac{n^4}{4}\right). \qquad (122)$$

Et comme, pour une valeur de N correspondante au dernier sommet, on doit avoir $^2V_n = 0$, il faut que l'on obtienne

$$\frac{^1A\,N^2}{2} = \frac{^1B\,N^4}{4}. \qquad (123)$$

Digitized by Google

Cette équation (122) nous permettra de construire toutes les ordonnées de la courbe des différences après avoir établi deux droites, dont les angles, avec l'horizon, sont liés par les tangentes ayant pour expressions

$$\frac{{}^1A}{2} \quad \text{et} \quad \frac{{}^1B}{4},$$

et dont les ordonnées correspondent aux abscisses mesurées par (n^2) et n^4. — Dans le coefficient ${}^1A$, la valeur de p_1 se déduit de la relation (115).

Mais cette équation (122), qui donne la mesure des coordonnées de la courbe des différences, n'apprend rien sur le caractère particulier de cette courbe.

Pour arriver à cette connaissance, il faut descendre plus avant dans la composition intime de cette courbe. A cet effet, reprenons l'équation des accroissements de ses ordonnées (119) et (120).

Construisons ensuite, par les moyens graphiques, les termes ${}^1An$ et ${}^1Bn^2$ pour toutes les valeurs de n.

Tous les termes en n de ces équations (119) et (120) seront représentés par les ordonnées de la droite AC (fig. 28).

Toutes les ordonnées en n^3, obtenues graphiquement, donneront lieu à une courbe analogue à celle représentée (fig. 29).

Comme les signes des termes des équations (119) et (120) sont inverses l'un de l'autre, les courbes qui représentent ces deux termes ont aussi des positions inverses, relativement à l'axe horizontal.

Les accroissements des ordonnées de la courbe des différences seront donc mesurées par la *différence* des ordonnées correspondantes des lignes AC et A'C' (fig. 28 et 29).

Si donc, après avoir porté les ordonnées de la droite AC de la (fig. 28) sur la (fig. 30), nous prenons cette nouvelle droite AC (fig. 30) pour axe des abscisses de la courbe A'C' (fig. 29), de sorte que B'C' de la courbe (fig. 29) égale B'C' de la courbe (fig. 30), nous obtiendrons la courbe A,a,b,C'.

Digitized by Google

Et les ordonnées, comprises entre cette courbe A,*a*,*b*,C′ et l'horizontale AB, *mesureront par conséquent les accroissements des ordonnées de la courbe des différences.*

Il ne s'agit plus maintenant que de lire sur cette (fig. 30) toutes les circonstances de la courbe des différences, au moyen des différences des ordonnées de cette courbe.

De A en *a*, les accroissements vont en *augmentant;* mais, à partir du point *a* jusqu'en *b*, ces accroissements vont en *diminuant*, *mais sans changer de signe.*

Il faut donc en conclure que la courbe présentera pour l'ordonnée qui passe en *a* un point d'*inflexion.*

Au point *b*, les accroissements sont nuls; la courbe aura donc un *élément horizontal.*

Enfin, à partir de ce point *b* jusqu'en C′, les *accroissements changent de signe*, c'est-à-dire qu'ils deviennent des *décroissements d'ordonnées* : ce qui nous fait voir que cet élément horizontal *b′* de la courbe correspondante à l'ordonnée *b* est un maximum.

Cette courbe des différences aura donc, à partir de la première tige :

1° Un *point d'inflexion* correspondant à *a;*

2° Un *point maximum* correspondant à *b.*

Si maintenant nous ajoutons les unes à la suite des autres les ordonnées de cette courbe A*ab*C′, nous obtiendrons les ordonnées de la courbe A*a′b′*B, qui est la courbe des différences qu'il s'agissait de construire.

Nous verrons, dans la deuxième partie de ce travail, qui traitera des applications de la théorie développée dans cette première partie, avec quelle facilité nous obtiendrons les ordonnées de la courbe des différences en nous appuyant sur les considérations précédentes.

Nous allons passer maintenant à la détermination des autres éléments des polygones réels d'équilibre.

[144] Les *abscisses* font partie des données du problème dans ce sens que

Digitized by Google

les projections horizontales des côtés du polygone sont données et égales entre elles.

L'abscisse H_n du sommet n a pour expression

$$H_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) h. \tag{124}$$

[145] Essayons maintenant de déterminer la longueur de la courbe réelle d'équilibre. C'est une opération très-délicate et qui exige de la précision, si l'on ne veut pas commettre de graves erreurs dans l'estimation de la longueur de la flèche, qui augmente dans une très-grande proportion pour un faible accroissement dans la longueur de la chaîne.

L'équation générale (23), qui donne la longueur d'un polygone en fonction des données habituelles du problème, se transformera en la suivante, en observant que, dans le cas qui nous occupe, $h =$ constante :

$$P_n = \Pi_n = (P_n + \Gamma_n + \Theta_n) = \left[(p + \gamma h) n + \left(\frac{2}{3}\frac{\gamma V^2_n}{H^4_n} h^3 + \frac{\Omega h^3}{H^3_n}\right) n^3\right], \tag{125}$$

Ce qui nous donne pour la longueur L_n du polygone, en nous servant des formules (70), (73), (80), (90) et (91) :

$$L_n = \left\{\begin{array}{l} \frac{h}{2} \\ + h(n-1) \\ \quad + \frac{1}{2} h \left[\left(\frac{\Pi_1}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\Pi_2}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\Pi_3}{Q}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{\Pi_{n-1}}{Q}\right)^2\right] \\ \quad - \frac{h}{2.4} \left[\left(\frac{\Pi_1}{Q}\right)^4 + \left(\frac{\Pi_2}{Q}\right)^4 + \left(\frac{\Pi_3}{Q}\right)^4 + \ldots\ldots + \left(\frac{\Pi_{n-1}}{Q}\right)^4\right] \\ + \frac{1.3.h}{2.4.6} \left[\left(\frac{\Pi_1}{Q}\right)^6 + \left(\frac{\Pi_2}{Q}\right)^6 + \left(\frac{\Pi_3}{Q}\right)^6 + \ldots\ldots + \left(\frac{\Pi_{n-1}}{Q}\right)^6\right] \\ - \frac{1.3.5.h}{2.4.6.8} \left[\left(\frac{\Pi_1}{Q}\right)^8 + \left(\frac{\Pi_2}{Q}\right)^8 + \left(\frac{\Pi_3}{Q}\right)^8 + \ldots\ldots + \left(\frac{\Pi_{n-1}}{Q}\right)^8\right] \\ + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{126}$$

Digitized by Google

Si nous voulons nous borner aux trois premiers termes de cette formule (126), et si, comme nous l'avons déjà fait précédemment, nous représentons par

$$\Sigma^{n-1}(n)$$

la somme de toutes les valeurs que peut prendre n depuis 1 jusqu'à $(n-1)$ inclusivement en croissant par unité, on obtient l'equation (126) sous la forme suivante :

$$L_n = nh - \frac{h}{2} + h\left(\frac{1}{2Q^2}\Sigma^{n-1}(\Pi_n)^2 - \frac{1}{8Q^4}\Sigma^{n-1}(\Pi_n)^4 + \text{etc.}\right). \qquad (127)$$

[146] Mais cette expression contient la composante horizontale Q, dont il convient de se débarrasser, afin de ne laisser en évidence que les fonctions indispensables qui sont les données ordinaires du problème.

Or, cette valeur de la composante horizontale Q est donnée (71); elle est :

$$Q = \frac{h}{V_n}(\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \ldots\ldots\ldots + \Pi_{n-1}) = \frac{h}{V_n}\Sigma^{n-1}\Pi_n. \qquad (128)$$

Remarquons que cette expression (128) doit être constante dans toute l'étendue de la courbe, puisqu'elle représente la composante horizontale des tensions qui est la même pour tous les éléments.

La valeur de Π_n est représentée (125) par une équation à deux termes, en n et n^3. Si l'on fait, dans cette équation,

$$p = \pi h,$$

en remplaçant les coefficients composés par les coefficients simples suivants :

$$\left.\begin{aligned} (\pi + \gamma) &= A \\ \left(\frac{2}{3}\frac{\gamma V^2_n}{H^4_n} + \frac{\Omega}{H^3_n}\right) &= B. \\ \text{et} \qquad \Pi_n &= (Ahn + Bh^3n^3) \end{aligned}\right\} \qquad (129)$$

Digitized by Google

on obtient :

$$L_n = \left\{ \frac{h}{2} + h(n-1) + \frac{h}{2}\Sigma^{n-1}\left(\frac{\Pi_n}{\frac{h}{V_n}\Sigma^{n-1}\Pi_n}\right)^2 \right\} \qquad (130)$$

Faisant ensuite les sommations indiquées pour les fonctions de Π_n, il vient d'abord

$$\left(\frac{h}{V_n}\Sigma^{n-1}\Pi_n\right)^2 = \frac{1}{V^2_n}\left\{\overline{Ah^2\left(\frac{n^2-n}{2}\right) + Bh^4\left(\frac{n^4-2n^3+n^2}{4}\right)}\right\}^2 \qquad (131)$$

et passant à la limite afin de simplifier la formule, $h^2(n^2-n) = h^2n^2 - h^2n$ deviendra $x^2 - hx$, et comme h est infiniment petit, hx sera négligeable ; de même $h^4(n^4 - 2n^3 + n^2)$ deviendra $x^4 - 2x^3h + x^2h^2$ qui se réduira à x^4, et l'on aura :

$$\lim.\left(\frac{h}{V_n}\Sigma^{n-1}\Pi_n\right)^2 = \frac{1}{V^2_n}\left\{\overline{\frac{Ax^2}{2} + \frac{Bx^4}{4}}\right\}^2; \qquad (132)$$

développant et indiquant par V_x et H_x les ordonnées et abscisses de cette courbe nouvelle, il vient, au lieu de l'équation (132),

$$\lim.\left(\frac{h}{V_n}\Sigma^{n-1}\Pi_n\right)^2 = \frac{1}{V^2_x}\left\{\frac{A^2}{4}x^4 + \frac{AB}{4}x^6 + \frac{B^2}{16}x^8\right\}; \qquad (133)$$

mais cette expression (133) représente la valeur de la composante horizontale en fonction des données ordinaires (128) : et comme elle est constante dans toute l'étendue de la courbe d'après la propriété des composantes horizontales des tensions, dans les polygones *chargés de poids*, il s'ensuit que cette dernière valeur (133), exprimée en fonction des coordonnées limites H_n et V_n, est :

$$\left(\frac{h}{V_n}\Sigma^{n-1}\Pi_n\right)^2 = \frac{1}{V^2_n}\left\{\frac{A^2}{4}H^4_n + \frac{AB}{4}H^6_n + \frac{B^2}{16}H^8_n\right\}. \qquad (134)$$

Digitized by Google

[147]. La sommation du numérateur deviendra en passant aussi à la limite;

$$\text{limite de } h\Sigma^{n-1}(\Pi_n)^2 = \text{limite de } h\Sigma^{n-1}(Ahn + Bh^2n^2)^2 = \left(\frac{A^2}{3}x^3 + \frac{2AB}{5}x^5 + \frac{B^2}{7}x^7\right). \quad (135)$$

Si enfin l'on introduit dans l'équation (130) les fonctions (134) et (135) l'on obtiendra la longueur de la portion de la *courbe réelle d'équilibre* qui répond à l'abscisse x.

Cette expression est :

$$L_x = \left[x + \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{A^2x^3}{3} + \frac{2ABx^5}{5} + \frac{B^2x^7}{7}}{\frac{1}{V^2_n}\left(\frac{A^2H^4_n}{4} + \frac{ABH^6_n}{4} + \frac{B^2H^8_n}{16}\right)}\right\}\right] \quad (136)$$

[148] Mais cette équation est encore susceptible d'être simplifiée, tout en conservant l'exactitude nécessaire pour les besoins ordinaires de la pratique.

Pour cela remarquons que le coefficient B étant très-petit, par lui-même, pour les données habituelles, on peut sans inconvénient faire disparaître les termes en B^2. Il vient alors, au lieu de la formule (136), après suppression des termes en B^2 et réduction des termes fractionnaires :

$$L_x = \left[x + \frac{2V^2_n}{3H^4_n}\left\{\frac{5A^2 + 6ABx^2}{5A^2 + 5ABH^2_n}x^3\right\}\right] \quad (137)$$

Et pour la longueur totale de la courbe, dont la dernière corde est H_n, l'on obtient, en appelant L cette longueur de la demi-chaîne dont la flèche est V_n :

$$L = \left[H_n + \frac{2}{3}\frac{V^2_n}{H_n}\left\{\frac{5A + 6BH^2_n}{5A + 5BH^2_n}\right\}\right] = \left[H_n + \frac{2}{3}\frac{V^2_n}{H_n}\left\{1 + \frac{BH^2_n}{5(A + BH^2_n)}\right\}\right] \quad (138)$$

Ou en rétablissant les valeurs des coefficients A et B fournis par les équations (129), et réduisant :

Digitized by Google

$$L = H_\pi + \frac{2}{3}\frac{V^2_\pi}{H_\pi}\left\{1 + \frac{\frac{2}{3}\frac{\gamma V^2_\pi}{H^2_\pi} + \frac{\Omega}{H_\pi}}{5\left\{(\pi+\gamma) + \frac{2}{3}\frac{\gamma V^2_\pi}{H^2_\pi} + \frac{\Omega}{H_\pi}\right\}}\right\} =$$

$$= H_\pi + \frac{2V^2_\pi}{3H_\pi}\left\{1 + \frac{2\gamma V^2_\pi + 3\Omega H_\pi}{15(\pi+\gamma)H^2_\pi + 10\gamma V^2_\pi + 15\Omega H_\pi}\right\} \qquad (139)$$

Telle est la longueur du demi-arc de la *courbe réelle d'équilibre* dont la *flèche* et la *corde* sont V_π et $2H_\pi$.

[149] Si dans cette équation (139) l'on néglige les deux derniers termes du dénominateur, l'on arrive à l'expression ci-dessous :

$$L = H_\pi + \frac{2}{3}\frac{V^2_\pi}{H_\pi}\left\{1 + \frac{2\gamma V^2_\pi + 3\Omega H_\pi}{15(\pi+\gamma)H^2_\pi}\right\} \qquad (140)$$

qui a été obtenue par Navier au moyen d'une analyse plus élevée.

[150] Si maintenant on compare l'une de ces expressions (139) ou (140) de la longueur d'un arc de la courbe réelle d'équilibre à l'expression analogue (63) qui est celle de l'arc de parabole correspondant, c'est-à-dire ayant même flèche et même corde, l'on en tire plusieurs conséquences très-utiles dans les applications.

En désignant par

$$L' = \left(H_\pi + \frac{2}{3}\frac{V^2_\pi}{H_\pi}\right) \qquad (141)$$

la longueur du demi-arc parabolique dont V_π et $2H_\pi$ seraient la flèche et la corde, l'on obtient la formule suivante par la différence de longueur,

$$\Delta l,$$

entre l'arc de la courbe réelle et l'arc parabolique ayant même flèche et même ouverture;

$$\Delta l = (L - L') = \frac{2}{3}\frac{V^2_\pi}{H_\pi}\left(\frac{2\gamma V^2_\pi + 3\Omega H_\pi}{15(\pi+\gamma)H^2_\pi}\right) \qquad (142)$$

Telle est la condition d'allongement nécessaire, dans la pratique, pour

Digitized by Google

que le câble parabolique puisse se transformer en une courbe réelle de même flèche et de même ouverture.

[151] Il y a encore un autre point également important à connaître, c'est celui de la variation de flèche que subit un *câble parabolique*, supposé inextensible, quand, en rétablissant l'action du poids des chaînes et des tiges de suspension, il se courbe suivant la ligne qui convient à l'équilibre réel de tous les poids dont il est chargé.

Puisque les deux arcs ont même développement, les expressions (140) et (141) devront être fournies par des valeurs égales : les variables seront ici les flèches des deux courbes.

L'arc d'équilibre réel se courbant plus que l'arc parabolique tout en conservant la même corde, il faudra nécessairement que la *flèche* de la *courbe réelle d'équilibre* diminue d'une quantité que nous représenterons par

$$\Delta V_N ;$$

si de plus nous faisons dans l'équation (140)

$$\left(\frac{2\gamma V^2_N + 3\Omega H_N}{15(\pi + \gamma) H^2_N}\right) = c , \qquad (143)$$

en conservant à V_N sa première valeur, ce qui n'a aucune influence appréciable sur l'exactitude des résultats, mais ce qui les simplifie beaucoup, l'équation (140) sera de la forme :

$$L = H_N + \frac{2}{3} \frac{(V_N - \Delta V_N)^2}{H_N} (1 + c). \qquad (144)$$

Égalant cette équation à l'équation correspondante de l'arc parabolique (141), il vient :

$$V^2_N = (V_N - \Delta V_N)^2 (1 + c) \qquad (145)$$

et en développant et négligeant le terme au quarré de la différence, qui est très-faible, il vient :

Digitized by Google

$$V_n = V_n(1+c) + \Delta V_n(-2-2c) : \qquad (146)$$

d'où l'on tire pour l'expression de la diminution ΔV_n de flèche qu'aura subie la flèche de la parabole quand l'arc de cette courbe se transformera en la courbe réelle d'équilibre :

$$\Delta V_n = \frac{cV_n}{2(1+c)} ; \qquad (147)$$

et si nous remplaçons c par la valeur portée dans (143) nous obtiendrons :

$$\Delta V_n = \frac{V_n}{2}\left(\frac{\frac{2\gamma V^2_n + 3\Omega H_n}{15(\pi+\gamma)H^2_n}}{1+\frac{2\gamma V^2_n + 3\Omega H_n}{15(\pi+\gamma)H^2_n}}\right) = \frac{V_n}{2}\left(\frac{2\gamma V^2_n + 3\Omega H_n}{15(\pi+\gamma)H^2_n + 2\gamma V^2_n + 3\Omega H_n}\right) \qquad (148)$$

Formule qui en négligeant les deux derniers termes du dénominateur qui sont très-faibles devant le premier terme, devien

$$\Delta V_n = \frac{V_n}{2}\left(\frac{2\gamma V^2_n + 3\Omega H_n}{15(\pi+\gamma)H^2_n}\right) \qquad (149)$$

[152] Si la chaîne de suspension était formée par la réunion de barres de fer formant *les côtés* du *polygone* dont les projections horizontales sont égales entre elles, une appréciation de la longueur en masse ne serait plus suffisante et il faudrait recourir au calcul de chacun des côtés du polygone.

Or nous savons que l'on a (21) la relation suivante pour la longueur d'un des côtés compris entre les sommets n et $(n+1)$:

$$l_n = h\left(1+\frac{\Pi^2_n}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} ; \qquad (150)$$

en remplaçant ici Π_n par la valeur tirée de (125) l'on sera à même de pouvoir calculer les longueurs de tous les côtés du polygone.

Mais, comme on le voit, ce calcul serait assez pénible, puisqu'il exige

Digitized by Google

d'abord la connaissance du poids Π_n qui dépend d'une équation à deux termes où la variable indépendante est au troisième degré.

[153] Au lieu de la solution numérique, il vaut infiniment mieux, pour le cas qui nous occupe, employer les solutions graphiques que fournissent l'épure (fig. 23) et les paragraphes qui en dépendent.

Seulement ici les poids P_1, P_2, P_3, etc., seront remplacés par les poids Π_1, Π_2, Π_3, dont les valeurs seront fournies par l'équation (125) par la méthode graphique : cette équation (125) qui est de la forme (129)

$$\Pi_n = (Ah.n + Bh^3.n^3) \qquad (151)$$

se résoudra graphiquement au moyen des deux droites dont les angles auront pour tangentes Ah et Bh^3, et dont les abscisses seront proportionnelles à n et (n^3).

Ces valeurs linéaires de Π_n obtenues, comme il vient d'être dit, seront ensuite portées sur une épure analogue à celle de la (fig. 23) qui donnera alors les longueurs des côtés du polygone.

Ce procédé graphique nous paraît infiniment préférable à celui de calcul direct; il est à la fois plus expéditif et moins sujet à erreur que ce dernier, puisqu'il peut donner les longueurs des côtés en grandeur d'exécution.

[154] Il nous reste encore à déterminer la valeur des tensions. Elles peuvent s'obtenir graphiquement par l'épure dont nous venons de parler au sujet des longueurs des côtés du polygone. Si l'on voulait une solution numérique elle résulterait de l'expression générale (24)

$$t_n = \sqrt{Q^2 + \Pi^2_n}, \qquad (152)$$

dans laquelle on remplacerait Π_n par sa valeur comme il a été dit tout à l'heure, et Q par celle que fournirait l'équation (107) qui est déduite de l'équation de la courbe réelle d'équilibre.

[155] Quant à la valeur des tangentes, elle est donnée, comme nous avons déjà eu occasion de le voir, par l'expression suivante :

Digitized by Google

$$\text{tang}\,\alpha_n = \frac{\Pi_n}{Q^2}, \qquad (153)$$

dans laquelle Π_n et Q ont les valeurs que nous avons appris à déterminer.

Section 10.

[156] Les solutions que nous avons données dans ce chapitre, conviennent au cas où les polygones ont une certaine étendue; mais quand on ne compte qu'un petit nombre de côtés, on peut employer un procédé graphique analogue à celui qui a été suivi dans les tracés précédents.

Après avoir tracé la droite AD (fig. 31), qui donne, par son intersection avec les perpendiculaires équidistantes, les valeurs des poids placés sur le plancher du pont, on trace, par les procédés indiqués plus haut, le polygone parabolique A, 1, 2, 3, ... 9, 10.

Puis considérant ce polygone comme polygone réel d'équilibre, on prend au compas, sur cette épure, les longueurs des côtés et des tiges de suspension dont les poids sont aussi donnés avec une exactitude suffisante pour la pratique.

Puis au-dessous de la ligne AD on porte les poids Θ_n des tiges de suspension dont les valeurs linéaires sont alors comprises entre la ligne droite AD et la courbe AD'.

A partir de cette nouvelle ligne AD' ainsi déterminée, on porte, toujours sur les perpendiculaires, les valeurs linéaires des poids Γ_n des câbles de suspension; valeurs qui se trouvent exprimées linéairement par les droites comprises entre les courbes AD' et AD''.

Les poids totaux $(P_n + \Theta_n + \Gamma_n)$ sont donc représentés par les portions des perpendiculaires comprises entre la droite AB et la courbe AD''.

Ces poids servent à déterminer le nouveau polygone A, 1'', 2'', 3'', ... 9'', 10, qui est celui de l'équilibre réel.

Digitized by Google

Le polygone A, 1′, 2′, 3′, ... 9′, 10′ représente ici le polygone d'essai dont l'objet est de faire connaître la valeur de la composante horizontale Q des tensions du polygone parabolique A, 1, 2, ... 9, 10; lequel polygone sert à déterminer les longueurs et par suite le poids des câbles et des tiges de suspension.

[157] Nous allons passer maintenant à l'étude d'une classe de polygones assez intéressants sous le rapport de la valeur scientifique de la courbe qu'ils représentent à leur limite : ce sont ceux dont les côtés, ayant tous une longueur uniforme, sont chargés de poids égaux.

Dans les polygones que nous avons examinés dans le chapitre précédent, les tiges également chargées sont *équidistantes en projection horizontale;* tandis que les polygones dont nous allons nous occuper dans le chapitre suivant, bien qu'ayant comme les premiers les tiges également chargées, présentent leurs tiges *équidistantes sur la chaîne*, et non plus équidistantes sur l'horizontale.

Les polygones à côtés égaux sont surtout employés dans les ponts suspendus dont les chaînes sont formées d'anneaux de fer en barres.

Cette disposition a pour but de faciliter la fabrication des anneaux qui dès lors se forgent tous sur un même modèle.

Mais si cette disposition est plus favorable à l'ouvrier, en lui évitant des pertes de temps et des erreurs, elle ne présente pas les mêmes avantages à l'ingénieur qui, étant obligé, dans ce cas, de recourir à l'emploi de formules compliquées, est entraîné dans des calculs assez longs pour le temps qu'il peut consacrer à la partie théorique de son art. Heureusement, dans les cas ordinaires que présentent les applications, certaines considérations pratiques et l'emploi de méthodes mixtes, de calcul numérique et graphique, permettent d'obtenir les résultats nécessaires avec une promptitude suffisante.

C'est ce que nous allons examiner dans les chapitres suivants.

Digitized by Google

CHAPITRE V.

Sect. 11. — Courbe d'équilibre des chaînes supportant des charges uniformément réparties sur leur longueur : et des ponts suspendus dont les tiges sont également espacées sur la chaîne.

[158.] Nous avons fixé précédemment les conditions d'équilibre des polygones dont les projections horizontales des côtés sont égales entre elles et dont les sommets supportent des poids uniformes.

Nous arrivons maintenant au cas où, tout en maintenant l'égalité entre les poids placés aux sommets, comme dans les exemples précédents, on modifie les longueurs des côtés du polygone, qui présentent alors des *longueurs uniformes*, et non plus des *projections horizontales égales entre elles.*

Comme nous l'avons fait observer dans le chapitre précédent, cette disposition est surtout adoptée pour les ponts suspendus dont les chaînes sont formées d'anneaux de fer en barres; — anneaux auxquels on donne une *longueur uniforme* dans le double but de faciliter le forgeage des pièces, et d'éviter les erreurs dans les longueurs des anneaux.

Nous suivrons encore ici une marche analogue à celle que nous avons adoptée pour l'étude des ponts suspendus à tiges équidistantes en projec-

Digitized by Google

tions horizontales. Nous admettrons d'abord que le poids total est uniformément réparti sur la longueur des chaînes de suspension.

Cette hypothèse, qui n'est pas rigoureusement vraie, donne cependant des résultats suffisamment exacts pour les appareils de suspension d'une dimension ordinaire ; c'est pourquoi nous l'avons d'abord admise. Nous avons pensé, en outre, qu'il ne serait pas inutile pour le constructeur de connaître, par des formules aussi simples que celle que comporte la question, la forme d'une ligne qui s'approche aussi près que possible de la courbe réelle d'équilibre.

Ajoutons encore que la courbe formée par une chaîne uniformément pesante est précisément celle que décrivent les câbles ou les chaînes de suspension avant de recevoir le plancher, et que, comme nous le verrons par la suite, très-souvent le constructeur est obligé d'avoir recours à la flèche des câbles ou des chaînes à vide pour en déduire la flèche que prendront les chaînes quand elles seront chargées de tout le poids du pont.

[159.] Si dans l'équation générale (15), qui est l'expression générale de l'ordonnée d'un polygone dont les côtés sont donnés ainsi que les poids P_n, on fait simultanément :

$$l = \text{constante}$$
$$P_n = np = n\pi l,$$

il vient pour l'ordonnée cherchée :

$$V_n = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\pi l}{Q}\right) l \Sigma^{n-1}(n) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi l}{Q}\right)^3 l \Sigma^{n-1}(n)^3 \\ +\frac{3}{8}\left(\frac{\pi l}{Q}\right)^5 l \Sigma^{n-1}(n)^5 \\ -\frac{5}{16}\left(\frac{\pi l}{Q}\right)^7 l \Sigma^{n-1}(n)^7 \\ +\ldots \end{array} \right\}. \qquad 154)$$

Digitized by Google

On peut se borner aux quatre premiers termes de cette série, qui, dans les applications, est rapidement convergente à cause de la petitesse du rapport $\left(\frac{\pi l}{Q}\right)$.

Effectuant les sommations indiquées, et passant à la limite ; cas auquel tous les termes qui renferment l seul, ou à une puissance supérieure à celle de n, disparaissent ; il vient en faisant $nl = S$ et $V_n = y$:

$$y = S\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi S}{Q}\right) - \frac{1}{2.4}\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^3 + \frac{3}{8.6}\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^5 - \frac{5}{16.8}\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^7 + \text{etc...}\right\} \quad (155)$$

Équation qui servira à déterminer la valeur de l'ordonnée y en fonction de l'arc S correspondant, quand on connaîtra la valeur du rapport $\left(\frac{\pi S}{Q}\right)$.

Dans la suite de ce chapitre, nous donnerons plusieurs expressions de ce rapport en fonction des données habituelles de la pratique.

[160.] Pour les applications où les longueurs des portions de polygone sont données en fonctions des n^es des sommets ou des côtés du polygone, il convient de mettre en évidence, dans la formule précédente, l'indice du sommet dont on cherche l'ordonnée. Cette ordonnée étant, comme on sait, celle de la courbe circonscrite au polygone dont l est la longueur constante d'un quelconque des côtés.

On a donc, en admettant, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, que le polygone a un côté horizontal :

$$S = \left(n - \frac{1}{2}\right) l, \quad (156)$$

expression qui, étant substituée dans l'équation (155) qui, dans la pratique, peut être prise pour la courbe circonscrite au polygone, donne :

$$V_n = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{Q}\right) l^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^3 l^4 \left(n - \frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^5 l^6 \left(n - \frac{1}{2}\right)^6 - \right.$$
$$\left. - \frac{5}{128}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^7 l^8 \left(n - \frac{1}{2}\right)^8 + \dots\right\} \quad (156)$$

Digitized by Google

Comme on le voit, nous avons remplacé dans cette équation l'ordonnée y par V_n pour exprimer le caractère de discontinuité.

Dans les cas ordinaires de la pratique, on pourra s'arrêter aux deux premiers termes du second membre, lesquels fourniront des résultats suffisamment exacts.

Telles sont les formules au moyen desquelles l'ingénieur pourra calculer, soit *numériquement*, soit *linéairement*, les valeurs des ordonnées quand il aura déterminé le poids π par mètre courant de la chaîne et de la surcharge ainsi que la composante horizontale Q des tensions de cette même chaîne.

Mais ordinairement, dans les applications, ce n'est pas la valeur de la composante Q, qui est une des données du problème, c'est indépendamment du poids par mètre courant, ou l'arc et l'ordonnée, ou l'arc et l'abscisse.

Dans le 1er cas, il convient d'exprimer le rapport $\frac{\pi S}{Q}$ en fonction de l'ordonnée y et de l'arc S. On arrive à ce résultat, en appliquant à l'équation (155) la méthode du retour des suites qui fournit l'expression suivante remarquable par sa simplicité :

$$\left(\frac{\pi S}{Q}\right) = 2\left\{\left(\frac{y}{S}\right) + \left(\frac{y}{S}\right)^3 + \left(\frac{y}{S}\right)^5 - \left(\frac{y}{S}\right)^7 + \dots\right\} \qquad (157)$$

équation de laquelle on déduira la valeur de Q, quand on connaîtra celles de y, S et π, qui font ordinairement partie des conditions du problème.

[161.] Les *abscisses* de la courbe dont nous venons de trouver la formule des ordonnées (155) ou (156), se déduisent de l'équation générale (19) dans laquelle on fait :

$$l = \text{constante}$$
$$P_n = np = n\pi l,$$

comme nous l'avons déjà fait pour la détermination des ordonnées de cette

Digitized by Google

même courbe. Passant ensuite à la limite, en faisant évanouir tous les termes qui renferment h seule ou engagée avec n portée à une puissance moins élevée que celle de h, il vient pour cette abscisse x :

$$x = S\left\{1 - \frac{1}{2.3}\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^2 + \frac{3}{8.5}\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^4 - \frac{5}{16.7}\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^6 + \frac{35}{128.9}\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^8 - \ldots\right\} \quad (158)$$

valeur qui dépend du paramètre $\left(\frac{\pi}{Q}\right)$ comme celle de l'ordonnée dont nous avons donné l'expression (155).

Avant de chercher à déterminer la valeur de ce paramètre en fonction des données ordinaires du problème, nous ferons observer que dans la majeure partie des cas, que présente la pratique, on peut se borner aux deux premiers termes de l'équation précédente ; de sorte que l'on a, après avoir remplacé S par $\left(n - \frac{1}{2}\right) l$ comme cela a déjà eu lieu au sujet de l'équation des ordonnées :

$$H_n = \left\{\left(n - \frac{1}{2}\right) l - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^3 l^3 + \ldots\right\} \quad (159)$$

x étant remplacé par H_n.

Telle est l'équation des *abscisses* de la *courbe* qu'affecte une chaîne également pesante, ou que décrivent les chaînes d'un pont suspendu dont la charge peut être considérée comme étant uniformément répartie sur la longueur des câbles de suspension.

Dans ce qui précède, nous nous sommes servis, et nous nous servirons dans ce qui va suivre, des mots de *courbe* ou de *polygone*, indifféremment l'un pour l'autre : dans ce cas il faut entendre par *courbe* celle qui est *circonscrite au polygone* ; ou par *polygone*, celui qui est *inscrit dans la courbe.*

Ainsi quand nous dirons la *courbe* décrite par les câbles de suspension, ou le *polygone* formé par les chaînes de suspension, nous voudrons désigner, ou la courbe passant par tous les sommets du polygone dont on a l'équa-

Digitized by Google

tion des sommets, ou le polygone dont tous les sommets se trouvent sur la courbe dont la formule est donnée.

Ainsi :

$$y = f(x) \qquad (a)$$

et

$$y = f'\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)h\right] \qquad (a')$$

auront pour nous la même signification quand l'on aura :

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)h = x.$$

Ou encore :

$$y = \varphi(S) \qquad (b)$$

$$y = \varphi'\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)l\right] \qquad (b')$$

seront pour nous des formules équivalentes, quand on pourra poser :

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)l = S,$$

n, qui indique le numéro des tiges ou des sommets du polygone, pouvant être un nombre quelconque mais entier et positif.

[162] Les formules (158) et (159) renferment aussi le rapport $\left(\frac{\pi}{Q}\right)$ dont il faut connaître la valeur pour déduire des équations les valeurs des abscisses. Si l'on se borne aux trois premiers termes de l'équation (158), on peut en extraire la valeur du rapport en question, mais si l'on veut obtenir une valeur plus exacte, il faut tirer de l'équation (158) la valeur du rapport $\left(\frac{\pi S}{Q}\right)$ par la méthode du retour des suites. Dans ce cas, il vient :

$$\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^2 = \left\{6\left(\frac{S-x}{S}\right) + 16.20\left(\frac{S-x}{S}\right)^2 + 29.623\left(\frac{S-x}{S}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + 45{,}669\left(\frac{S-x}{S}\right)^4 + \ldots\right\} \qquad (160)$$

Digitized by Google

et ensuite :

$$\left(\frac{\pi s}{Q}\right)=\sqrt{6\frac{S-x}{S}}\left\{1+1.35\left(\frac{S-x}{S}\right)+1,559\left(\frac{S-x}{S}\right)^2+1,602\left(\frac{S-x}{S}\right)^3+\ldots\right\} \quad (161)$$

Telle est l'expression en x du rapport dont la valeur fera connaître celle des abscisses au moyen des équations (158) et (159).

[163] La *longueur* de la chaîne est ordinairement une des données du problème : elle a pour expression en mettant la variable n en évidence :

$$S_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)l. \quad (162)$$

Mais indépendamment des questions où il ne s'agit que des longueurs des tiges de suspension et où, par conséquent, la valeur de l'arc S est la variable indépendante, il en est d'autres que présente l'établissement des ponts, où la longueur de l'arc est l'inconnue du problème et dont il faut déterminer la valeur en fonction de la corde et de la flèche.

Il est des cas aussi où il est nécessaire de déterminer quelle variation introduit dans la longueur de la flèche, une augmentation donnée dans la longueur de l'arc ; ou réciproquement.

Enfin dans d'autres circonstances qu'offre l'établissement des ponts, il est intéressant de connaître quelle modification apportera le poids de la charpente et des tiges dans la flèche d'un câble tendu à vide.

Toutes ces questions qui ont toutes leur degré d'intérêt pour le constructeur, seront traitées dans la section suivante.

[164] S'il n'était question que d'un rapport approché entre la corde, l'arc et la flèche, comme cela arrive quand il s'agit de fixer approximativement la longueur de la chaîne d'un pont dont la flèche et la corde sont données, on pourrait se servir de la formule (59) ou (63) relative à la parabole, qui ferait connaître la longueur cherchée de la chaîne.

Digitized by Google

Cette valeur de S, ainsi connue, étant introduite dans une des équations (155) ou (158) déterminerait avec une grande exactitude ou la flèche ou la corde correspondante. Mais, comme nous l'avons dit plus haut, nous examinerons, dans la section suivante, des méthodes de calcul qui permettent d'obtenir directement toutes les solutions des problèmes assez nombreux que peut présenter la pose des chaînes des ponts suspendus.

[165] *La tension* des différents côtés du polygone a pour expression, comme nous l'avons vu dans l'exposé des principes fondamentaux, équation (24) :

$$t_n = \sqrt{Q^2 + P^2_n} = \sqrt{Q^2 + \pi^2 S^2} = Q\sqrt{1 + \left(\frac{S\pi}{Q}\right)^2} \qquad (163)$$

Expression dans laquelle l'inconnue ordinaire est la composante horizontale Q des tensions, que feront connaître les équations (157) ou (161) suivant que les données du problème seront la flèche ou la corde de la courbe décrite par les chaînes (1).

[166] *La tangente* de l'angle que forme le côté de la chaîne correspondant à la longueur S de la chaîne, est donnée, comme on le sait, par la relation suivante :

$$\text{tang}\,\alpha_n = \frac{P_n}{Q} = \frac{\pi S}{Q}, \qquad (164)$$

C'est-à-dire que la valeur de cette tangente est donnée directement par les équations (157) et (161) qui sont exprimées chacune en fonction de données différentes.

(1) Dans les équations (163) et (164), on a remplacé P_n par πS au lieu de $\pi\left(S + \frac{l}{2}\right)$. Dans cette substitution, on commet une erreur qui est représentée par $\frac{\pi l}{2}$ relativement à P_n. C'est au constructeur à savoir si cette erreur peut être tolérée pour le cas qu'il a à traiter.

Digitized by Google

Section 12.

[167] Comme nous l'avons déjà fait voir dans les chapitres précédents, il est des cas où l'ingénieur doit préférer les constructions graphiques aux formules algébriques et d'autres en outre où l'on doit employer simultanément les deux modes de solution ; l'un des deux servant soit à compléter soit à contrôler les résultats fournis par l'autre.

C'est pourquoi par analogie avec ce que nous avons déjà fait à l'égard de la parabole, nous allons déduire le tracé graphique de la chaînette, des propriétés mécaniques de cette courbe.

[168] La courbe ou le polygone devant être en équilibre sous l'action de poids uniformément répartis sur la courbe ou le polygone, il s'ensuit que le tracé de la figure s'exécutera d'une manière analogue à celle qui a déjà été employée pour la détermination de la parabole ; avec cette seule différence, dans la distribution des poids, que les longueurs des côtés du polygone étant égaux entre eux, dans le cas qui nous occupe, les sommets et par conséquent les points d'attache des poids sont *équidistants sur la chaîne* au lieu d'être *équidistants sur l'horizontale* comme cela a lieu pour la parabole.

Ainsi, après avoir tracé deux lignes AB et AC perpendiculaires entre elles (fig. 32), on porte sur AB une longueur $A1 = \frac{l}{2}$, égale à la moitié de la longueur constante l des côtés du polygone. Puis portant sur la perpendiculaire conduite par 1 une longueur proportionnelle à $P_1 = p$ qui est le poids placé au sommet n° 1 et prenant ensuite sur AB une longueur représentant la composante horizontale Q, l'on aura déterminé par l'oblique t_1 la résultante de P_1 et Q, c'est-à-dire la tension du côté cherché 1, 2 qui est parallèle à t_1.

Abaissant du sommet n° 2 une perpendiculaire sur AB et portant sur cette

Digitized by Google

nouvelle perpendiculaire, à partir de la ligne AB, une longueur $P_2 = 2p$ qui représente tous les poids placés sur le polygone depuis le point le plus bas jusqu'à ce sommet n° 2, l'on obtient une nouvelle oblique t_2, résultante de P_2 et de Q. Cette oblique t_2 qui représente la tension du nouveau côté cherché 2, 3, sert à tracer ce nouveau côté en conduisant par le sommet n° 2 une parallèle à t_2.

Ce nouveau côté déterminera un troisième sommet n° 3 par lequel on conduira une nouvelle perpendiculaire sur laquelle on portera une nouvelle ligne P_3, qui, avec la composante constante Q fournira une nouvelle oblique t_3 au moyen de laquelle on construira le quatrième côté du polygone, 3, 4; et ainsi de suite jusqu'au dernier sommet.

Comme on le voit, cette épure, qui donne la figure exacte du polygone, fournit directement tous les éléments nécessaires à la construction d'un polygone semblable. Mais dans la pratique les polygones présentent quelquefois un développement si considérable, que le procédé que nous venons d'indiquer cesserait d'être applicable si l'on tenait à obtenir les grandeurs des éléments de la construction avec une certaine exactitude.

Dans ce cas alors, on condense l'épure en la réduisant au minimum de surface comme dans le tracé que nous avons précédemment fait connaître (fig. 9).

Après avoir conduit deux droites AB et BC perpendiculaires entre elles (fig. 33), on prendra AB = Q, et sur la perpendiculaire BC, on portera des longueurs représentant les poids p, $2p$, $3p$, $4p$, etc., puis joignant les extrémités de ces longueurs au point A, on obtiendra les obliques t_1, t_2, t_3, t_4,.... etc., qui représentent en grandeur et en inclinaison les tensions des côtés respectifs du polygone cherché.

Du point A et avec un rayon égal à la longueur donnée l d'un des côtés du polygone, on décrira l'arc de cercle ab qui, par sa rencontre avec les différentes obliques, déterminera les sommets 2, 3, 4, 5, etc., du polygone cherché.

Digitized by Google

Cette épure 33 fera donc connaître tous les éléments du polygone :

Les accroissements v_1, v_2, v_3, etc., des ordonnées;

Les accroissements h_1, h_2, h_3, etc., des abscisses;

Les tensions t_1, t_2, t_3, etc., des côtés du polygone, ainsi que les inclinaisons de ces mêmes côtés sur l'horizontale.

Or comme cette épure peut être tracée à une échelle aussi grande qu'on le jugera convenable, elle sera susceptible de présenter le degré d'exactitude que l'on voudra atteindre.

Sous ce double rapport du minimum de surface pour son tracé et de sa grande exactitude, cette méthode est essentiellement pratique et elle doit être adoptée par les constructeurs dans la plupart des cas un peu compliqués que présente l'application.

Section 13.

[169] La courbe dont il vient d'être question appartenant aux ponts suspendus dont la charge est uniformément répartie sur la chaîne, est aussi, d'après cette définition, celle que décrivent les chaînes tendues à vide, c'est-à-dire avant d'avoir reçu les tiges ou le plancher du pont.

Or, il y a une foule de circonstances où il est nécessaire de connaître les rapports qui peuvent exister entre l'arc, la flèche ou la corde des câbles tendus à vide, et les éléments analogues des chaînes soumises à l'influence du poids du pont.

Entre toutes les courbes que peuvent présenter les chaînes d'un pont suspendu, nous prendrons celles que décrivent les chaînes quand on suppose le poids uniformément réparti sur l'horizontale. Pour ce cas, qui est le plus ordinaire, nous savons, d'après ce qui précède, que la courbe est une parabole.

C'est donc entre la *chaînette*, courbe que décrivent les câbles tendus à vide, et la *parabole*, autre courbe qu'affectent les chaînes d'un pont sus-

Digitized by Google

pendu dont la charge est proportionnelle aux abscisses de la courbe, que nous allons établir les rapports dont nous avons parlé en commençant cette section.

[170] Au moyen des différentes valeurs du rapport $\frac{\pi S}{Q}$. trouvées précédemment, nous pourrons exprimer les *ordonnées* en fonction des abscisses et réciproquement.

Si, dans l'équation (155) on substitue les puissances successives et impaires des valeurs $\left(\frac{\pi S}{Q}\right)$ tirées de (161), l'on obtient :

$$y = S\sqrt{\frac{S-x}{S}}\left\{1{,}225 - 0{,}18375\left(\frac{S-x}{S}\right) - 0{,}0196\left(\frac{S-x}{S}\right)^2 - 0{,}13414\left(\frac{S-x}{S}\right)^3\right\}, \quad (165)$$

donc, en pratique, on pourra déterminer les valeurs des ordonnées de la chaînette en fonction des abscisses et de l'arc correspondant.

[171] La valeur de l'*abscisse* en fonction de l'ordonnée et de l'arc, se déduira de l'équation (158) dans laquelle on substituera les valeurs des puissances paires successives de $\frac{\pi S}{Q}$ tirées de (157).

Il viendra :

$$x = S\left\{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{S}\right)^2 - \frac{2}{15}\left(\frac{y}{S}\right)^4 - \frac{2}{35}\left(\frac{y}{S}\right)^6 - \text{etc.}\right\}\ldots \qquad (166)$$

Telle est l'équation qui fait connaître l'abscisse ou la corde de la chaînette, quand on se donne l'ordonnée ou la flèche de la courbe ainsi que l'arc correspondant ; cet arc étant compté à partir de son point le plus bas, celui en lequel il touche l'horizontale où se mesurent les abscisses.

[172] Si l'on voulait se borner aux trois premiers termes de l'équation (166), on pourrait en déduire l'expression de la flèche de la chaînette en fonction de la longueur de l'arc et de la corde correspondante : l'on arriverait ainsi à l'équation suivante, qui a été donnée par M. Desjardins, en suivant une autre marche :

Digitized by Google

$$f = S\sqrt{\frac{-5+\sqrt{55-30\frac{h}{S}}}{2}}. \qquad (167)$$

[173] Nous allons maintenant chercher à déterminer une expression de la variation de flèche qu'éprouve la chaînette en se transformant en parabole.

Pour ne pas confondre les éléments correspondants des deux courbes en question dans les équations qui établiront une relation entre ces deux courbes, nous désignerons, dans ce qui va suivre, par S, y et x, l'arc, l'ordonnée et l'abscisse de la chaînette; et par C, f et h, l'arc, l'ordonnée et l'abscisse de la parabole correspondante.

De l'expression de l'abscisse de la chaînette qui est donnée par l'équation (166), on déduit par la méthode du retour des suites :

$$y^2 = S^2\left\{\frac{30}{20}\left(\frac{S-x}{S}\right) - \frac{9}{20}\left(\frac{S-x}{S}\right)^2 - 0{,}0193\left(\frac{S-x}{S}\right)^3 - 0{,}0096\left(\frac{S-x}{S}\right)^4 - \text{etc.}\right\} \qquad (168)$$

pour la valeur du carré de l'ordonnée de la chaînette en fonction de l'abscisse et de l'arc correspondant de cette même courbe.

Si maintenant on extrait, par la méthode du retour des suites, la valeur du carré de l'ordonnée de la parabole de l'équation (61), dans laquelle on a substitué $\frac{2y}{x^2}$ à la place de $\frac{\pi}{Q}$, l'on obtient :

$$f^2 = h^2\left\{\frac{30}{20}\left(\frac{C-h}{h}\right) + \frac{27}{20}\left(\frac{C-h}{h}\right)^2 - 0{,}463\left(\frac{C-h}{h}\right)^3 + \ldots\right\} \qquad (169)$$

Équations desquelles on peut déduire la différence des flèches des deux courbes.

Sur une corde commune BD (*fig.* 34), construisons une parabole A'C'B et une chaînette ACB ayant des arcs d'égale longueur.

Digitized by Google

La chaînette aura pour flèche $AD = y$, et celle de la parabole sera $A'D = f$.

Si l'on représente par Δ la fraction qui exprime de combien la flèche de la parabole l'emporte sur celle de la chaînette de même longueur d'arc, l'on aura :

$$\left.\begin{array}{l} f - y = AA' = \Delta f; \\ \text{d'où} \\ y = f - \Delta f. \end{array}\right\} \qquad (170)$$

Mais si l'on veut se servir des équations précédentes (168) et (169), il faut poser :

$$\left.\begin{array}{l} f^2 - y^2 = f^2 - (f - \Delta f)^2 = 2f^2\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2}\right) \\ \text{d'où} \\ \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2}\right) = \frac{f^2 - y^2}{2f^2}. \end{array}\right\} \qquad (171)$$

Ainsi, retranchant l'une de l'autre les équations (169) et (168), et divisant la différence par $2f^2$, l'on aura la différence entre les flèches des deux courbes, à la moitié près du carré de cette différence. Or, comme cette différence Δ est elle-même une fraction très-faible, il s'ensuit que l'erreur commise en négligeant la moitié de son carré, n'introduit pas dans les résultats une erreur appréciable en pratique.

On aura donc :

$$\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2}\right) = \frac{1}{2f^2}\left\{\begin{array}{l} \frac{30}{20}\left\{h(C-h) - S(S-x)\right\} \\ + \frac{9}{20}\left\{3(C-h)^2 + (S-x)^2\right\} \\ - \frac{0.46}{h}(C-h)^3 - \frac{0.0193}{S}(S-x)^3 \\ + \frac{0.83}{h^2}(C-h)^4 + \frac{0.0096}{S^2}(S-x)^4 \\ - \text{etc.} \end{array}\right\} \qquad (172)$$

mais la recherche qui nous occupe exige que l'on ait simultanément

Digitized by Google

$$S = C$$
$$x = h,$$

de sorte que l'équation précédente devient :

$$\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2}\right) = \frac{1}{2f^2}\left\{\begin{array}{l} \frac{30}{20}(C-h)(h-C) \\ + \frac{36}{20}(C-h)^2 \\ -(C-h)^3\left(\frac{0.46}{h} + \frac{0\ 0193}{C}\right) \\ +(C-h)^4\left(\frac{0.83}{h^2} + \frac{0\ 0096}{C^2}\right) \\ - \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (173)$$

Mais si l'on fait attention que les coefficients qui ont pour dénominateurs h à différentes puissances, sont très-faibles, on peut encore simplifier l'équation précédente en prenant la corde pour l'arc ; c'est-à-dire en remplaçant $\frac{0,0193}{C}$ et $\frac{0,0096}{C}$ par $\frac{0,0193}{h}$ et $\frac{0,0096}{h}$ dans l'équation précédente. Il vient alors :

$$\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2}\right) = \frac{1}{2f^2}\left\{0,3(C-h)^2 - \frac{0.44}{h}(C-h)^3 + \frac{0.84}{h^2}(C-h)^4 - \text{etc.}\right\} \quad (174)$$

Mais cette équation renferme les trois variables C, h et f dont l'une quelconque des trois est nécessairement fonction des deux autres. Or les deux variables qui, par la nature ordinaire du problème, sont indépendantes, dans ce sens qu'elles font ordinairement partie des données du problème, sont la corde et la flèche. Il convient donc de remplacer dans cette équation, l'arc C en fonction de sa flèche et de sa corde.

Or, si dans l'équation (61) on remplace $\frac{\pi}{Q}$ par $\frac{2y}{x^2}$, il vient :

$$(C-h) = \left\{\frac{h}{6}\left(\frac{2f}{h}\right)^2 - \frac{h}{40}\left(\frac{2f}{h}\right)^4 + \frac{h}{112}\left(\frac{2f}{h}\right)^6 - \text{etc}\right\} \quad (175)$$

Digitized by Google

Élevant les deux membres de cette équation aux puissances deuxième et troisième et remplaçant, dans l'équation (174), $(C-h)^2$ et $(C-h)^3$ par leurs valeurs déduites de l'équation ci-dessus, il vient, en se bornant à la quatrième puissance de $\left(\frac{f}{h}\right)$:

$$\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2}\right) = \frac{1}{15}\frac{f^2}{h^2} - 0{,}145\frac{f^4}{h^4}. \qquad (176)$$

Si l'on voulait obtenir une plus grande exactitude, on élèverait au carré cette valeur approchée $\Delta = \frac{1}{15}\frac{f^2}{h^2} - 0{,}145\frac{f^4}{h^4}$, on en prendrait la moitié qu'on retrancherait de (176); alors en se bornant aux termes en $\frac{f^4}{h^4}$ on aurait :

$$\Delta = \frac{1}{15}\frac{f^2}{h^2} - 0{,}143\frac{f^4}{h^4}. \qquad (177)$$

Telle est la formule qui donne l'excès de la flèche f de la parabole sur la flèche y de la chaînette; cette flèche f étant prise pour unité et les deux courbes ayant même longueur d'arc et même corde. Δ satisfaisant toujours à la condition exprimée par l'équation (170).

Ainsi l'expression de la flèche y de la chaînette en fonction des éléments paraboliques f et h sera :

$$y = f(1-\Delta) = f\left(1 - 0{,}0666\frac{f^2}{h^2} + 0{,}143\frac{f^4}{h^4}\right) \qquad (178)$$

[174] On peut aussi avoir à résoudre le problème inverse, c'est-à-dire (fig. 34) connaissant la chaînette ACB par sa flèche, sa corde et son arc, en déduire la flèche de la parabole en laquelle cette chaînette se transformera tout en conservant sa longueur d'arc et sa corde.

On a en désignant par Δ_1 la différence cherchée :

$$y + \Delta_1 y = f = y(1+\Delta_1); \qquad (179)$$

Mais d'après ce qui précède, on a aussi :

Digitized by Google

$$f(1-\Delta)=y,$$

ce qui donne la relation suivante :

$$\left.\begin{aligned} f\Delta &= y\Delta_1 \\ \Delta_1 &= \frac{f}{y}\Delta \end{aligned}\right\}. \qquad (180)$$

d'où

Remplaçant dans cette équation f par sa valeur (179), on a :

$$\Delta_1=\frac{y(1+\Delta_1)}{y}\Delta=\Delta+\Delta\Delta_1.$$

Cette valeur de Δ_1 se compose donc de la valeur Δ trouvée précédemment et d'une différence seconde $\Delta\Delta_1$ que l'on peut remplacer par la différence seconde Δ^2 sans erreur appréciable dans les applications. L'équation précédente devient donc :

$$\Delta_1=\Delta+\Delta^2. \qquad (181)$$

L'expression de la valeur de Δ_1 en fonction des éléments de la chaînette qui sont les données du problème, ne dépend donc maintenant que de l'expression de Δ en y et x qui sont la flèche et la corde connues de la chaînette.

Pour établir cette relation, reprenons l'équation (177) et faisons pour abréger :

$$\frac{1}{15}=a, \qquad 0.143=b. \qquad (182)$$

Cette équation (177) est de la forme :

$$\Delta=a\frac{f^2}{h^2}-b\frac{f^4}{h^4}.$$

Ou comme les cordes des deux courbes sont égales, par hypothèse, l'on a $h=x$; de sorte que l'équation précédente prend la forme suivante :

Digitized by Google

$$\Delta = a\frac{f^2}{x^2} - b\frac{f^4}{x^4}, \qquad (183)$$

dans laquelle il suffit de remplacer f par sa valeur en y pour avoir l'expression cherchée de Δ.

Mais nous avons :

$$f = y + \Delta_1 y;$$

ce qui nous donne pour les deuxième et quatrième puissances de f, en négligeant les termes qui renferment la différence Δ_1 portée au delà de la première puissance :

$$f^2 = y^2 + 2y^2\Delta_1 \quad = y^2(1 + 2\Delta_1),$$
$$f^4 = y^4 + 4y^4\Delta_1 \quad = y^4(1 + 4\Delta_1).$$

L'expression ci-dessus de Δ devient donc quand on y a remplacé f en fonction de y :

$$\Delta = a\frac{y^2}{x^2} + 2a\frac{y^2}{x^2}\Delta_1 - b\frac{y^4}{x^4} - 4b\frac{y^4}{x^4}\Delta_1. \qquad (184)$$

Mais pour établir dans l'équation ci-dessus les valeurs des coefficients qui renferment Δ_1, on peut prendre, sans crainte d'erreur sensible, le premier terme de l'équation (177) dans laquelle on aura remplacé le rapport $\frac{f}{h}$ par celui de $\frac{x}{y}$ qui se rapporte à la chaînette. On aura donc, en remplaçant Δ_1 par $a\frac{y^2}{x^2}$:

$$\Delta = a\frac{y^2}{x^2} + 2a^2\frac{y^4}{x^4} - b\frac{y^4}{x^4} - 4ab\frac{y^6}{x^6};$$

ou encore en négligeant le terme en $\frac{y^6}{x^6}$:

$$\Delta = a\frac{y^2}{x^2} + (2a^2 - b)\frac{y^4}{x^4}. \qquad (185)$$

De cette équation on tirera la valeur de Δ^2, en négligeant les puissances de $\frac{y}{x}$ supérieures à la quatrième :

Digitized by Google

$$\Delta^2 = a^2 \frac{y^4}{x^4}, \qquad (186)$$

De sorte que l'équation (181) deviendra, en y remplaçant Δ et Δ^2 par leurs valeurs précédentes et a et b par leurs valeurs numériques (182) :

$$\Delta_1 = \Delta + \Delta_2 = a\frac{y^2}{x^2} + (3a^2 - b)\frac{y^4}{x^4} = \frac{1}{15}\frac{y^2}{x^2} - 0{,}1297\frac{y^4}{x^4}. \qquad (187)$$

Telle est l'expression de la fraction de la flèche y de la chaînette, qu'il faut *ajouter* à cette flèche de la chaînette, pour obtenir la flèche de la parabole correspondante ; c'est-à-dire de la parabole ayant même longueur d'arc et même corde que la chaînette.

L'expression de la flèche de la parabole correspondante à la chaînette est donc :

$$f = y(1 + \Delta_1) = y\left(1 + 0{,}0666\frac{y^2}{x^2} - 0{,}1297\frac{y^4}{x^4}\right). \qquad (188)$$

[175] Un autre problème intéressant à connaître, est celui qui établit la relation qui existe entre les longueurs des arcs de la chaînette et de la parabole : ces courbes ayant même flèche et même corde.

Ainsi soient (fig. 35) un arc parabolique Ad'B et un arc de chaînette AdB ayant pour cordes et flèches communes les lignes CB$=x=h$ et AC$=f=y$; on demande la différence entre les longueurs des arcs des deux courbes en fonction de la flèche et de la corde.

L'énoncé pratique de ce problème serait celui-ci : ayant tendu à vide la chaîne d'un pont suspendu, laquelle décrit la chaînette AdB, on demande de quelle quantité il faut raccourcir cette chaîne en la tirant vers les culées, pour que, lorsque la chaîne sera chargée du poids du pont et qu'elle affectera alors la forme parabolique, elle conserve toujours la même flèche AC$=f$.

On pourrait évidemment résoudre ce problème au moyen des formules données plus haut ; mais les calculs seraient assez longs.

Digitized by Google

Nous pensons donc qu'il vaut mieux établir une seule formule qui donne directement cette différence.

En représentant par S et C les arcs de la chaînette et de la parabole; x, y et f, h les flèches et cordes de ces courbes, l'on aura, si l'on désigne de plus par δ la fraction qui exprime la différence entre les deux arcs :

$$C + \delta C = S, \tag{189}$$

d'où :

$$\delta C = S - C. \tag{190}$$

Comme on le voit, cette solution exige que l'on ait les équations des deux arcs S et C en fonction des mêmes données qui sont ici la flèche et la corde. Or les équations de la chaînette, trouvées précédemment, ne permettent pas d'en déduire la valeur de l'arc en fonction de la corde et de la flèche; mais pour établir cette relation entre l'arc de la chaînette, sa corde et sa flèche, il nous suffira de remplacer dans l'expression de l'arc parabolique (61) la flèche f de la parabole par la valeur de cette flèche exprimée en fonction de la flèche y de la chaînette, équation (188).

L'arc parabolique a pour expression, d'après ce que nous avons déjà vu équation (175) :

$$C = h\left\{1 + \frac{2}{3}\frac{f^2}{h^2} - \frac{2}{5}\frac{f^4}{h^4} + \frac{4}{7}\frac{f^6}{h^6} - \frac{10}{9}\frac{f^8}{h^8} + \ldots\ldots\right\}; \tag{191}$$

d'autre part, la flèche f de la parabole a pour expression en fonction de la flèche y de la chaînette, l'équation (188) rapporté ci-dessous :

$$f = y\left(1 + 0{,}0666\frac{y^2}{x^2} - 0{,}143\frac{y^4}{x^4}\right).$$

Si donc nous remplaçons les diverses puissances de f dans l'équation (191) par les équivalentes déduites du second membre de l'équation ci-dessus, nous aurons l'équation de l'arc de la chaînette en fonction de sa corde et de sa flèche.

Digitized by Google

En formant les différentes puissances paires et successives de f, nous aurons d'abord, en nous bornant aux huitièmes puissances de y :

$$\left.\begin{aligned}
f^2 &= y^2\left(1 + 0{,}1333\frac{y^2}{x^2} - 0{,}2816\frac{y^4}{x^4} - 0{,}019\frac{y^6}{x^6}\right)\\
f^4 &= y^4\left(1 + 0{,}2666\frac{y^2}{x^2} - 0{,}5454\frac{y^4}{x^4}\right)\\
{}^6 &= y^6\left(1 + 0{,}3999\frac{y^2}{x^2}\right)\\
f^8 &= y^8
\end{aligned}\right\} \qquad (192)$$

L'équation (191) deviendra donc, en y remplaçant f par ses différentes valeurs tirées de (192) et en y faisant $C = S$ et $h = x$:

$$S = x\left\{\begin{aligned}
&1\\
&+\frac{2}{3}\frac{y^2}{x^2} + 0{,}0888\frac{y^4}{x^4} - 0{,}1878\frac{y^6}{x^6} - 0{,}0126\frac{y^8}{x^8}\\
&\qquad - \frac{2}{5}\frac{y^4}{x^4} - 0{,}1064\frac{y^6}{x^6} + 0{,}2182\frac{y^8}{x^8}\\
&\qquad\qquad + \frac{4}{7}\frac{y^6}{x^6} + 0{,}2284\frac{y^8}{x^8}\\
&\qquad\qquad\qquad - \frac{10}{9}\frac{y^8}{x^8}
\end{aligned}\right\} \qquad (193)$$

ou, en réduisant :

$$S = x\left\{1 + \frac{2}{3}\frac{y^2}{x^2} - 0{,}311\frac{y^4}{x^4} + 0{,}2772\frac{y^6}{x^6} - 0{,}4771\frac{y^8}{x^8}\right\} \qquad (194)$$

Telle est l'expression de l'arc de la chaînette en fonction de la flèche et de la corde correspondante.

Pour obtenir la différence cherchée, il nous suffit maintenant de retrancher l'une de l'autre les équations (194) et (191) : ce qui nous donne, toute réduction faite, et en conservant les symboles qui appartiennent à la parabole pour indiquer que la longueur de l'arc de cette dernière courbe est

Digitized by Google

prise pour unité, ou que la différence δ exprime une fraction par rapport à la longueur de l'arc parabolique :

$$\delta C = S - C = h \left\{ 0{,}089 \frac{f^4}{h^4} - 0{,}294 \frac{f^6}{h^6} + 0{,}634 \frac{f^8}{h^8} - \text{etc.} \right\}. \quad (195)$$

Telle est l'expression de la différence, en moins, que présente un *arc de parabole* sur un *arc de chaînette* ayant même flèche et même corde que lui.

Si l'on voulait prendre la longueur de l'arc de la chaînette pour unité au lieu de partir de celui de l'arc parabolique comme nous venons de le faire, il suffirait de poser :

$$\delta_1 S = \delta C, \quad (196)$$

en désignant par δ_1 la fraction dont l'arc de chaînette, pris pour unité, doit être diminué pour égaler en longueur l'arc parabolique ayant même flèche et même corde.

Puisque les différences totales $\delta_1 S$ et δC des deux arcs sont égales, leur expression commune est celle du second membre de l'équation (195) dans laquelle il faudra remplacer f et h par y et x pour exprimer que la longueur de l'arc de la chaînette est prise ici pour unité.

On aura donc :

$$-\delta_1 S = -x \left\{ 0{,}089 \frac{y^4}{x^4} - 0{,}294 \frac{y^6}{x^6} + 0{,}634 \frac{y^8}{x^8} \right\} \quad (197)$$

pour l'équation qui donne la longueur qu'il faut *retrancher* de l'arc de la chaînette, afin d'obtenir la longueur de l'arc parabolique ayant même flèche et même corde que l'arc de chaînette.

Comme on le voit par l'équation (196), la valeur de δ_1 sera peu différente de celle de δ, puisque ces différences sont en raison inverse des longueurs des arcs des deux courbes AdB et Ad'B (fig. 35) et la différence de ces courbes est elle-même très-faible, comme il est facile de s'en convaincre à l'inspection de l'équation (195).

Digitized by Google

Si l'on voulait d'ailleurs obtenir une expression approchée de cette différence seconde $(\delta - \delta_1)$, non pas que cette différence fût une quantité mesurable, dans les cas ordinaires de l'application, mais seulement pour avoir une grandeur tangible à l'esprit, il suffirait de se rappeler que l'on a :

$$\delta C = \delta_1 S = \delta_1 (C + \delta C) = C(\delta_1 + \delta\delta_1),$$

d'où :

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \delta_1 + \delta\delta_1 \\ \delta - \delta_1 &= \delta\delta_1 \end{aligned}\right\}, \qquad (198)$$

c'est-à-dire que cette différence des différences serait égale au produit de ces mêmes différences; quantité évidemment très-faible, puisque les différences sont elles-mêmes des fractions excessivement petites.

[176] Indépendamment des problèmes précédents, la chaînette ou la courbe décrite par la chaîne d'un pont suspendu tendue à vide, donne souvent lieu à cette double question :

« Trouver la valeur de l'accroissement de *l'arc* de la chaînette pour une » augmentation donnée de la *flèche* de la chaînette primitive? »

Ou le problème inverse :

« Déterminer l'accroissement de la *flèche* de la chaînette pour une aug- » mentation donnée de *l'arc* de la chaînette primitive? »

C'est par l'examen de ces deux cas que nous terminerons cette section.

[177] L'arc de la chaînette a pour expression (194) :

$$S = x\left\{1 + \frac{2}{3}\frac{y^2}{x^2} - 0{,}311\frac{y^4}{x^4} + 0{,}2772\frac{y^6}{x^6} - 0{,}4771\frac{y^8}{x^8} + \ldots\right\} \qquad (199)$$

Pour connaître l'allongement ΔS que subira l'arc S quand la flèche y croîtra de δy, il suffira de remplacer dans l'équation précédente S par $S + \Delta S$ et y par $y + \delta y$.

On obtiendra ainsi pour la valeur de ΔS en fonction de δy, si l'on se borne aux premiers termes :

Digitized by Google

$$\Delta S = x \left\{ \begin{array}{l} \delta \left(\frac{4}{3} \frac{y^2}{x^2} - 1{,}245 \frac{y^4}{x^4} + 1{,}633 \frac{y^6}{x^6} - \ldots \right) \\ + \delta^2 \left(\frac{2}{3} \frac{y^2}{x^2} - 1{,}867 \frac{y^4}{x^4} + 4{,}158 \frac{y^6}{x^6} - \ldots \right) \\ + \delta^3 \left(- 1{,}245 \frac{y^4}{x^4} + 5{,}544 \frac{y^6}{x^6} - \ldots \right) \end{array} \right\} \qquad (200)$$

[178] Dans la plupart des applications, l'accroissement δ est une fraction très-faible; de sorte que tous les termes où cette fraction est élevée au carré, ou à une puissance supérieure, peuvent être négligés.

On aura donc, avec une approximation suffisante et d'autant plus près de la valeur exacte de ΔS que l'accroissement δ sera lui-même très-faible :

$$\Delta S = x\delta \left(\frac{4}{3} \frac{y^2}{x^2} - 1{,}245 \frac{y^4}{x^4} \right). \qquad 201)$$

Telle est l'expression de l'allongement de l'arc correspondant à une augmentation de flèche de la courbe. Mais répétons-le encore, afin que l'on ne se méprenne pas sur son importance : cette dernière formule ne convient qu'aux petites valeurs de δ; dès que cette quantité augmente, il faut abandonner cette formule (201) pour celle qui la précède (200), que l'on simplifiera par l'abandon de quelques-uns de ses termes suivant la valeur de δ et du rapport $\frac{y}{x}$ et aussi d'après le degré d'exactitude que l'on voudra obtenir.

[179] La donnée du problème n'est pas toujours l'accroissement δ de la flèche : c'est quelquefois, au contraire, l'allongement ΔS qui est connu et la variation δy qu'a subie la flèche qu'il s'agit de déterminer.

Pour résoudre ce problème qui est l'inverse du précédent, il suffit de prendre l'équation trouvée plus haut (200) qui établit une relation entre ΔS et δy, et d'en extraire la variable δy en donnant à ΔS le rôle de variable indépendante. Après avoir effectué tous les calculs que nous ne reproduisons pas ici à cause de leur longueur, on obtient l'équation suivante :

Digitized by Google

$$\delta y = y \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta S}{x}\left(0{,}75\,\frac{x^2}{y^2} + 0{,}7005 - 0{,}281\,\frac{y^2}{x^2} - 1{,}135\,\frac{y^4}{x^4}\right) \\ + \frac{\Delta^2 S^2}{x^2}\left(-\,0{,}281\,\frac{x^4}{y^2} + 0{,}037 - 2{,}111\,\frac{y^2}{x^2} - 3{,}151\,\frac{y^4}{x^4}\right) \\ + \frac{\Delta^3 S^3}{x^3}\left(0{,}211\,\frac{x^6}{y^6} + 0{,}342\,\frac{x^4}{y^4} + 0{,}39\,\frac{x^2}{y^2} - 0{,}873 - 7{,}831\,\frac{y^2}{x^2} + 0{,}202\,\frac{y^4}{x^4}\right) \end{array} \right\} \quad (202)$$

Telle est l'expression de l'augmentation de longueur qu'éprouve la flèche y quand l'arc S subit un accroissement ΔS.

[180] Mais dans la plupart des cas, de la pratique, les faibles valeurs que prend ΔS permettent de se borner aux premiers termes de cette formule, et l'on obtient ainsi pour la formule pratique ordinaire :

$$\delta y = y\,\frac{\Delta S}{x}\left(0.75\,\frac{x^2}{y^2} + 0.7005\right);$$

ou encore, en simplifiant la forme :

$$\delta y = \Delta S\left(0.75\,\frac{x}{y} + 0.7005\,\frac{y}{x}\right).$$

[181] Si nous avons recherché avec quelques détails les relations qui existent soit entre les divers éléments de la chaînette, soit entre leurs variations respectives, c'est que, quelle que soit la courbe définitive après la pose du pont, celle qu'affectent les câbles à vide, c'est-à-dire quand ils ne sont soumis qu'à leur propre poids ordinairement uniforme, est une chaînette. Or, pour régler convenablement cette chaîne de pont qui se présente actuellement sous forme de chaînette, l'ingénieur doit connaître non-seulement les relations qui existent entre la flèche, la corde et l'arc de cette courbe, mais encore à quel accroissement de flèche correspond un accroissement d'arc donné ; ou réciproquement à quelle augmentation d'arc correspond une augmentation donnée de la flèche de cette même courbe. Problèmes qui se présentent fréquemment, soit que l'on fabrique les câbles

Digitized by Google

à pied d'œuvre, soit qu'on les établisse en place comme cela a déjà été pratiqué pour plusieurs ponts importants.

Nous allons passer maintenant au cas assez compliqué du calcul des ponts à tiges équidistantes sur la chaîne, dans lesquels on tient compte du mode de répartition variable des poids de l'appareil complet.

Sect. 14. — Des polygones d'équilibre des ponts suspendus à tiges de suspension également espacées sur la chaîne, en tenant compte du poids variable dû à toutes les parties de l'appareil.

[182] La formule générale qui donne la valeur de l'ordonnée d'un polygone dont les côtés sont connus ainsi que les différents poids placés à ses sommets, est donnée (15) dans la forme suivante :

$$V_n = \left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{Q} \Sigma \Pi_n \\ -\frac{1}{2} \frac{l}{Q^3} \Sigma \Pi^3_n \\ +\frac{3}{8} \frac{l}{Q^5} \Sigma \Pi^5_n \end{array} \right\}, \qquad (204)$$

équation dans laquelle il n'y a plus qu'à effectuer les sommations indiquées pour avoir la valeur de l'ordonnée V_n, après toutefois avoir remplacé le symbole Π_n par sa valeur.

[183] Mais ce poids total Π_n peut se décomposer, sous le rapport de sa répartition, en *trois groupes* de poids agissant chacun suivant une loi à lui propre et différente de celle des autres groupes.

[184] Nous placerons dans le *premier groupe* les poids qui, étant proportionnels à la longueur du câble, agissent pour donner à la chaîne la forme d'une *chaînette*.

Ces poids comprennent :

Digitized by Google

1° Ceux qui sont propres aux chaînes de suspension ;

2° Ceux qui sont dus aux attaches des tiges de suspension avec les chaînes et avec les poutrelles qui reçoivent le plancher du pont, telles que les chevalets, les étriers, les boulons, les écrous, les frettes, etc. ;

3° Ceux qui sont dus aux parties des tiges de suspension comprises entre les deux parallèles horizontales tangentes, l'une aux chaînes de suspension, l'autre à la courbe inférieure du plancher du pont ;

4° Les poids des poutrelles fixées aux tiges de suspension avec toutes leurs armatures, ferrures et tasseaux ;

5° Enfin, ceux des boulons, contre-fiches, etc., qui servent à fixer les garde-corps aux poutrelles du plancher.

[185] L'ensemble de ces poids pouvant être considéré comme uniformément réparti sur le polygone des chaînes, nous représenterons son intensité, sur l'unité de longueur, par γ.

[186] Pour exprimer le poids placé sur la chaîne de suspension en fonction de l'indice n d'un des côtés quelconques du polygone, il suffit de faire observer qu'à chaque sommet on peut condenser la moitié des poids qui sont répartis sur chacun des deux côtés qui partent du sommet en question. Or ces côtés ayant une longueur commune et égale à l, chaque sommet agit comme s'il était chargé du poids γl. L'on aura donc pour l'expression du poids total placé sur n sommets, qui compose le premier groupe, la formule suivante :

$$n\gamma l. \qquad (205)$$

[187] Le *second groupe* comprend tous les poids qui, comme ceux qui sont dus au plancher du pont, peuvent être considérés comme étant distribués sur la chaîne proportionnellement aux projections horizontales des différentes parties de celle-ci.

Si les poids de ce groupe agissaient seuls sur la chaîne du pont, ils lui feraient décrire une *parabole* puisque, comme nous l'avons vu plus haut, dans la parabole en équilibre sous l'action de poids, les charges que sup-

Digitized by Google

portent des portions quelconques de son arc sont proportionnelles aux projections horizontales de ces mêmes portions d'arc. Mais dans le cas où la chaîne est soumise aux efforts combinés des deux groupes de poids dont nous venons de parler, la courbe résultante doit participer à la fois de la forme de la *chaînette* qu'elle doit au premier groupe et de la forme *parabolique* que tend à lui imprimer le second. Cette courbe résultante différant d'autant moins de la *chaînette* ou de la *parabole* que la prépondérance des poids du premier groupe sera plus grande relativement à celle du second, ou inversement.

Les poids de ce second groupe qui tendent à donner aux chaînes la forme *parabolique* comprennent :

1° Ceux qui résultent de la partie uniforme et régulière du plancher, les poutrelles non comprises ;

2° Ceux qui sont produits par les parties uniformes des garde-corps.

[188] Si nous représentons par π l'ensemble des poids de ce second groupe sur l'unité de longueur du plancher, nous aurons pour la mesure du poids agissant sur les sommets du polygone, jusqu'au sommet n inclusivement, le produit du poids π par la projection horizontale de cette partie du polygone.

Mais la partie du plancher dont le poids total est supporté entièrement par les n premières tiges est égale à la projection horizontale de la longueur nl du polygone. Au lieu de chercher à déduire la projection du polygone réel encore inconnu, nous prendrons la projection d'un polygone qui lui est très-voisin pratiquement parlant et dont les sommets se trouvent sur la chaînette. Cette licence est permise dans le cas actuel, puisqu'elle n'introduit pas d'erreur appréciable dans les résultats que nous obtiendrons en remplaçant une courbe par l'autre et qu'elle facilitera nos calculs en nous permettant d'obtenir immédiatement les relations nécessaires entre l'arc et sa projection horizontale.

La projection horizontale de l'arc de la chaînette a été trouvée plus haut

Digitized by Google

(158); elle est de la forme suivante, en se bornant aux deux premiers termes de la série qui l'exprime :

$$x = S_n - KS^3_n;$$

et pour la portion nl du polygone qui diffère peu de la courbe :

$$x_1 = nl - n^2 l^3 K.$$

La valeur du coefficient K devra être déterminée par la condition de donner $x = X =$ la demi-corde du polygone pour une longueur du polygone correspondant à la demi-corde X.

On aura donc :

$$K = \frac{S_N - X}{l^3 \left(N - \frac{1}{2}\right)^3};$$

et pour la projection horizontale cherchée :

$$x_1 = nl - \left(\frac{S_N - X}{l^3 \left(N - \frac{1}{2}\right)^3}\right) n^3 l^3.$$

Cette projection multipliée par π qui représente l'ensemble des poids répartis sur l'unité de longueur de l'horizontale, donnera, pour l'ensemble des poids qui forment le second groupe, l'expression suivante :

$$\pi nl - \pi l^2 n^3 \left(\frac{S_N - X}{l^3 \left(N - \frac{1}{2}\right)^3}\right). \qquad (206)$$

[189] Enfin le *troisième groupe* se compose des portions de tiges de suspension comprises; 1° entre la chaîne du pont et sa tangente horizontale, 2° entre la courbe inférieure du plancher et sa tangente horizontale.

Ici encore, comme nous l'avons fait précédemment, nous pouvons prendre

Digitized by Google

les ordonnées de la chaînette pour celles de la courbe cherchée tout en nous tenant dans des limites d'erreur intangibles à nos sens.

L'ordonnée de la chaînette en se bornant au premier terme du développement (155) est de la forme :

$$y = MS^2, \tag{207}$$

équation qui serait celle d'un arc parabolique dont ici l'arc S tendu en ligne droite deviendrait l'abscisse, en plaçant verticalement le grand axe de la parabole.

Or nous avons vu, paragraphe [123], au sujet des modifications introduites dans la forme des chaînes paraboliques par les poids variables des différentes parties de l'appareil, que dans un pont à chaînes paraboliques le poids de toutes les portions de tiges comprises entre la tangente horizontale et l'arc parabolique était proportionnel aux aires comprises entre l'arc, la tangente horizontale à l'arc et l'ordonnée de l'extrémité supérieure de cet arc. Or on sait que cette aire est mesurée par le tiers du produit des coordonnées du point extrême de l'arc parabolique, c'est-à-dire par $\frac{xy}{3}$; et ici par $\frac{S_n y}{3}$ ou $\frac{nly}{3}$, puisque l'abscisse est représentée par l'arc de la chaînette ou les côtés du polygone qui se confondent sensiblement avec cet arc.

Si donc on représente par Ω le poids de toutes les portions des tiges de suspension pour le polygone entier et par Ω' le poids d'une partie de ces portions de tiges, correspondants au $n^{ième}$ sommet ou à la $n^{ième}$ tige du polygone, l'on aura le rapport suivant :

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{S_n y}{S_N Y},$$

d'où

$$\Omega' = \Omega \frac{S_n y}{S_N Y}. \tag{208}$$

Cette expression (208) ne tient compte que des portions de tiges comprises

Digitized by Google

entre les chaînes et la tangente horizontale à ces chaînes. Si l'on voulait ajouter les portions des tiges comprises entre le plancher et la tangente horizontale à la courbe inférieure du plancher, il suffirait d'augmenter la flèche des chaînes de celle qui mesure le bombement du plancher puisque la courbe du plancher ne dépendant que du choix de l'ingénieur, on peut la prendre de la même nature que celle des chaînes. Ainsi donc, pour nous, Y représentera ici, ou la somme des flèches des chaînes et du plancher, ou seulement la flèche des chaînes si le bombement du plancher peut être négligé.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici que dans les calculs qui suivent, il faudra ajouter un coefficient à l'expression de Y quand ce symbole de la flèche des chaînes devra représenter à la fois la flèche des chaînes et celle du plancher.

Si dans l'équation (208) nous remplaçons y et Y par leurs valeurs tirées de (207), nous obtiendrons :

$$\Omega' = \Omega \frac{S^3_n}{S^3_N}. \qquad (209)$$

Pour introduire cette expression dans celle du poids total Π, il faut mettre l'indice du sommet en évidence; nous remplacerons donc le rapport précédent par son équivalent, ou à peu près, en fonction de n et il viendra en dernier lieu :

$$\Omega' = \Omega \frac{l^3 n^3}{l^3 N^3}. \qquad (210)$$

Ce nouveau poids qui croît plus rapidement que la longueur de l'arc puisqu'il est proportionnel au cube de la longueur de cet arc, a pour effet de creuser un peu la courbe des chaînes vers le point d'attache, c'est-à-dire de forcer un peu la courbure de la chaînette vers les culées en l'éloignant davantage de la forme parabolique.

[190] Le poids total Π_n formé de la réunion des trois groupes (205), (206) et (210) aura donc pour expression générale :

Digitized by Google

$$\Pi_n = \left\{ (\gamma nl) + \left[\pi nl - \pi l^3 n^3 \left(\frac{S_n - X}{l^3 N^3} \right) \right] + \left(\Omega \frac{l^3 n^3}{l^3 N^3} \right) \right\}; \qquad (211)$$

Mais ces trois groupes de poids sont exprimés par des termes qui, ne renfermant la variable n qu'à deux puissances différentes, la première et la troisième, peuvent se réduire, en dernière analyse, à deux groupes de poids seulement.

En ordonnant par rapport à la variable indépendante n qui indique les numéros des sommets du polygone, il vient :

$$\Pi_n = \left\{ (\gamma + \pi) nl + \left(\frac{\Omega - \pi(S_n - X)}{l^3 N^3} \right) l^3 n^3 \right\}. \qquad (212)$$

Faisant pour simplifier les formules :

$$\left.\begin{array}{c} \gamma + \pi = A; \\ \left(\dfrac{\Omega - \pi(S_n - X)}{l^3 N^3} \right) = B = \dfrac{b}{l^3 N^3} \end{array}\right\}. \qquad (213)$$

L'équation précédente devient :

$$\Pi_n = Aln + Bl^3 n^3. \qquad (214)$$

Mais ce poids Π_n dont la loi de répartition détermine la forme de la courbe, est susceptible lui-même de trois interprétations différentes suivant la valeur du coefficient B de son second terme, puisque le coefficient A de son premier terme est toujours positif. En effet B peut être *positif nul* ou *négatif*. Ce poids Π_n, suivant l'un de ces trois cas, peut donc représenter trois courbes différentes.

[191] Si $B = 0$, le second terme est nul, et l'équation (214) se réduit à

$$\Pi_n = AS. \qquad (215)$$

Dans ce cas, le poids est uniformément distribué sur la courbe des chaînes, et le poids total croît avec la longueur de cet arc.

Digitized by Google

Nous avons vu précédemment qu'une chaîne également chargée en tous ses points affecte la forme d'une *chaînette*.

Ainsi donc, pour $B = 0$ la courbe décrite pour les chaînes du pont sera une *chaînette*.

[192] Si, au lieu d'être nul, le coefficient B était réel et *positif*, la formule (214) deviendrait

$$\Pi_n = AS + BS^3, \qquad (216)$$

c'est-à-dire qu'au poids uniforme A, placé sur la chaîne et qui donne la chaînette, s'en ajoute un autre qui croît, non plus seulement comme la longueur de l'arc, mais comme le cube de la longueur de cet arc : d'où il résulte que les parties hautes de la courbe sont beaucoup plus chargées par unité de longueur que les parties basses.

Cette surcharge vers les points d'attache de la courbe a pour effet d'augmenter la courbure de la courbe dans les points où cette surcharge agit. Il en résulte donc que la chaînette ACB, due d'abord au premier terme AS, se modifie par l'action du second terme $+ BS^3$, de telle sorte que la partie C' s'affaisse sous l'effort de la surcharge, et que le sommet A' se relève, puisque, par hypothèse, la longueur de l'arc est supposée invariable. La nouvelle courbe affectera donc la forme A'C'B (fig. 36).

[193] Le coefficient B étant négatif au contraire, la formule (214) se transforme en la suivante :

$$\Pi_n = AS - BS^3. \qquad (217)$$

Ainsi, dans ce cas, la charge uniforme A n'est plus proportionnelle à la longueur de l'arc S, mais elle suit une loi de décroissance proportionnelle au cube de la longueur de l'arc. Cette *diminution* de charge dans les parties hautes de la courbe, ou, ce qui revient au même, cette *surcharge* dans les parties basses vers le point A de la même courbe, produit un abaissement dans les parties où agit cette surcharge et un relèvement dans les parties supérieures vers le point d'attache B où cette charge est la moins forte.

Digitized by Google

Ainsi, dans le cas de B négatif, la courbe prend la forme A″C″B (fig. 36) relativement à la *chaînette* ACB prise comme terme de comparaison.

Comme on le voit, l'effet de ce terme négatif — BS^2 est de rapprocher la courbe réelle d'équilibre de la *parabole*, courbe dans laquelle, comme nous l'avons vu en effet, la charge croît moins vite que la longueur de l'arc, puisqu'elle est proportionnelle seulement à la projection horizontale de cet arc.

Si nous nous sommes livré à l'examen des modifications que le poids Π_n peut introduire dans la figure des chaînes suivant son mode de répartition sur l'arc, c'est qu'il est facile de pressentir dès maintenant, d'après le degré élevé de Π_n dans l'équation générale des ordonnées de la courbe réelle d'équilibre, qu'il sera indispensable, pour arriver à une formule pratique, de négliger ceux des termes qui n'entreront que pour une faible part dans le résultat final.

Or il nous a paru qu'un semblable choix ne pouvait être fait convenablement qu'après s'être d'abord rendu compte, non-seulement des valeurs relatives de tous les termes de la formule, mais surtout du sens dans lequel l'action de chacun de ces termes devait se manifester sur la forme d'équilibre de la courbe qu'ils déterminent : connaissance qui, seule, permet d'apprécier l'étendue et le sens des différences qu'introduit entre la courbe théorique et la courbe pratique, la suppression de quelques-uns des termes de l'équation rigoureuse de la courbe théorique.

[194] Si, pour ne point restreindre les limites de l'examen que nous avons voulu faire de la formule (214), nous avons admis pour le coefficient B toutes les hypothèses qui pouvaient faire varier la loi de répartition des poids sur les chaînes de suspension et par suite modifier la courbure de ces mêmes chaînes, il ne nous est plus possible maintenant d'appliquer cette formule (214) à la détermination des éléments du polygone, en lui conservant le caractère de généralité dont nous l'avons d'abord revêtue pour la discussion, sous peine de compliquer inutilement, au point de vue de

Digitized by Google

l'application au moins, les conséquences que nous aurons à déduire des formules finales où l'expression du poids Π_n sera engagée.

Pour déterminer la nature du coefficient B et le signe avec lequel il entre ordinairement dans les applications, il faut reprendre, pour un instant, l'examen des poids partiels dont ce coefficient B ne représente que la somme.

L'équivalent de B donné par (213) est :

$$B = \left(\frac{\Omega}{l^3N^3} - \frac{\pi(S_n - X)}{l^3N^3}\right) = \frac{1}{l^3N^3}\left[\Omega - \pi(S_n - X)\right], \qquad (218)$$

c'est-à-dire que ce coefficient B se compose d'une somme de deux séries de poids, dont l'une est toujours positive et l'autre toujours négative : somme qui est ensuite divisée par le cube du numéro du dernier sommet du polygone. Or la première somme $+\Omega$, qui est *toujours positive*, dans le cas des ponts à chaîne en dessus, comprend le poids de toutes les parties de tiges de suspension qui représentent les ordonnées de la courbe des chaînes. La seconde série $-\pi(S_n - X)$, qui est *toujours négative*, représente un poids qui a pour mesure l'excès de la longueur de l'arc S_n sur sa projection horizontale X, multiplié par la portion π du poids total qui peut être considéré comme étant uniformément répartie sur l'horizontale.

Dans les cas ordinaires, le terme positif l'emporte sur le terme négatif, de sorte que le coefficient B est le plus souvent positif. Cependant il se présente des cas où cette différence des deux termes est négative.

Cette oscillation entre le positif et le négatif, qui ne peut se faire qu'autant que la valeur du coefficient B ou $\frac{b}{l^3N^3}$ passe par zéro, indique suffisamment que la valeur du terme BS^2 n'est jamais bien élevée, dans les cas ordinaires de la pratique, relativement au premier terme AS. Nous admettrons donc, conformément aux données usuelles de la pratique, que le coefficient B est assez faible; et pour conserver à notre équation toute la généralité à l'égard du signe de ce coefficient B, nous donnerons à ce dernier,

Digitized by Google

dans la formule, le double signe $\pm$, en laissant à ceux qui se serviront de l'équation finale le soin de faire disparaître celui des deux signes que le calcul numérique du coefficient B fera rejeter.

[195] Reprenons maintenant l'équation (204) qui donne la valeur de l'ordonnée de la courbe des chaînes en fonction du poids Π_n que nous venons de déterminer. Cette équation est :

$$V_n = \left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{Q} \Sigma \Pi_n \\ - \frac{1}{2} \frac{l}{Q^3} \Sigma \Pi^2_n \\ + \frac{3}{8} \frac{l}{Q^5} \Sigma \Pi^3_n \\ - \text{etc.} \end{array} \right\}, \qquad (219)$$

en se bornant aux trois premiers termes, ce qui suffit, et au delà même, aux besoins ordinaires de la pratique. S'il se présentait quelques cas exceptionnels pour lesquels cette formule cessât de donner des valeurs suffisamment exactes, il faudrait y ajouter un ou deux termes, en se conformant à ce qui a été dit à ce sujet à l'occasion de la formule générale paragraphe [47].

Si dans l'équation ci-dessus on remplace les différentes puissances de Π_n par leurs valeurs déduites de (212), on obtiendra la valeur finale de V_n.

Les équations (212) et (213) donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_n = \left(Aln \pm \frac{b}{l^3N^3} l^3n^3 \right); \\ \Pi^2_n = \left(A^2l^2n^2 \pm 3A^2 \frac{b}{l^3N^3} l^5n^5 + 3A \frac{b^2}{l^6N^6} l^7n^7 \pm \frac{b^3}{l^9N^9} l^9n^9 \right); \\ \Pi^3_n = \left(A^3l^3n^3 \pm 5A^4 \frac{b}{l^3N^3} l^7n^7 + 10A^3 \frac{b^2}{l^6N^6} l^9n^9 \pm 10A^2 \frac{b^3}{l^9N^9} l^{11}n^{11} + \right. \\ \qquad \left. + 5A \frac{b^4}{l^{12}N^{12}} l^{13}n^{13} \pm \frac{b^5}{l^{15}N^{15}} l^{15}n^{15} \right); \end{array} \right\} \qquad (220)$$

en faisant attention que tous les termes qui contiennent b à une puissance

Digitized by Google

impaire dans les développements précédents doivent être précédés du double signe plus ou moins.

Comme on le voit, les développements des puissances de Π_n seraient trop compliqués pour les usages de la pratique, s'il n'était pas permis, sans erreur sensible, de négliger quelques-uns des termes où entre le coefficient B, qui est très-faible par rapport à A. En partant de cette hypothèse, et en nous bornant aux termes où la variable indépendante n ne dépasse pas le cinquième degré, l'on obtient pour l'expression de l'ordonnée (219) :

$$V_n = \left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{Q}\Sigma\left(Aln \pm \frac{b}{l^2N^2}l^3n^3\right) \\ -\frac{1}{2}\frac{l}{Q^3}\Sigma\left(A^2l^2n^2 \pm 3A^2\frac{b}{N^2l^2}l^4n^4\right) \\ +\frac{3}{8}\frac{l}{Q^5}\Sigma(A^4l^4n^4) \end{array} \right\}, \qquad (221)$$

ou encore, en ordonnant par rapport à la variable n :

$$V_n = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{A}{Q}\right)l^2\Sigma n \\ +\left(\frac{b}{(lN)^2Q} - \frac{A^3}{2Q^3}\right)l^4\Sigma n^3 \\ +\left(\frac{3A^5}{8Q^5} \pm \frac{3A^2b}{(lN)^2 2Q^3}\right)l^6\Sigma n^5 \end{array} \right\}, \qquad (222)$$

Effectuant les sommations et passant au polygone-limite, auquel cas $l^{a+1}\Sigma n^a = \frac{(ln)^{a+1}}{a+1} = \frac{S_n^{a+1}}{a+1}$, l'on obtient :

$$V_n = \left\{\frac{A}{2Q}S^2_n + \left(\pm\frac{b}{4QS^2_n} - \frac{A^3}{8Q^3}\right)S^4_n + \left(\frac{1}{16}\frac{A^5}{Q^5} \mp \frac{A^2b}{48^2_nQ^3}\right)S^6_n.\right\} \qquad (223)$$

Telle est l'expression de l'ordonnée de la courbe réelle d'équilibre dans la limite des hypothèses admises sur les valeurs relatives des poids des diverses parties de l'appareil. Malheureusement cette équation, qui renferme la

Digitized by Google

composante horizontale Q des tensions à la cinquième puissance, ne peut être employée sous cette forme.

[196] Mais si nous mettons $\frac{1}{Q}$ en évidence, nous aurons :

$$V_n = \frac{1}{Q}\left\{\frac{A}{2}S^2_n + \left(\pm\frac{b}{4S^3_n} - \frac{A^3}{8Q^2}\right)S^4_n + \left(\frac{A^5}{16Q^4} \mp \frac{A^2 b}{4S^3_n Q^2}\right)S^6_n.\right\} \qquad (224)$$

Prenant alors pour Q^2 et Q^4 les valeurs qui se rapportent à la chaînette (*) et déduites des équations (157) ou (161), ce qui n'introduira pas d'erreur sensible vu la petitesse des termes où se trouvent ces quantités, nous pourrons substituer ces valeurs numériques dans la parenthèse de l'équation (224) et avoir une équation de la forme :

$$V_n = \frac{1}{Q}M,$$

qui, subsistant aussi à la limite pour laquelle S_n devient S_n et $V_n = V_n$, donnera :

$$V_n = \frac{1}{Q}M_1, \qquad (225)$$

équation de laquelle on déduira la valeur définitive de Q, laquelle, substituée dans (224), donnera la valeur cherchée de V_n.

[197] Les *abscisses* de la courbe dont nous venons de déterminer la formule des ordonnées, se déduisent de l'équation générale (19) dans laquelle on fait

$$l = \text{constante} \quad P_n = \Pi_n.$$

Il vient alors, en mettant l en évidence :

(*) Si l'on veut avoir un résultat plus exact, on prendra pour Q une valeur moyenne entre la composante horizontale de la parabole et celle de la chaînette : chacune de ces courbes supportant le poids total agissant sur la courbe réelle.

Digitized by Google

$$H_n = \left\{ \begin{array}{l} h_0 \\ + (n-1)l \\ - \frac{1}{2}\frac{l}{Q^2}\Sigma\Pi^2_n \\ + \frac{1.3}{2.4}\frac{l}{Q^4}\Sigma\Pi^4_n \\ + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{l}{Q^6}\Sigma\Pi^6_n \end{array} \right\}, \qquad (226)$$

en se bornant aux cinq premiers termes de la série, qui devient rapidement convergente.

Remplaçant les puissances de Π_n par leurs valeurs déduites des équations (212) et (213), en se bornant toutefois aux termes où la variable n ne dépasse pas le sixième degré, ce qui suffit, même au delà des besoins ordinaires de la pratique, l'équation (226) deviendra :

$$H_n = \left\{ \begin{array}{l} h_0 \\ + (n-1)l \\ - \frac{1}{2}\frac{l}{Q^2}\Sigma\left(A^2l^2n^2 \pm 2A\frac{b}{(lN)^3}l^4n^4 + \frac{b^2}{(lN^6)}l^6n^6\right) \\ + \frac{3}{8}\frac{l}{Q^4}\Sigma\left(A^4l^4n^4 \pm 4A^3\frac{b}{(lN)^3}l^6n^6\right) \\ - \frac{5}{16}\frac{l}{Q^6}\Sigma(A^6l^6n^6) \end{array} \right\}, \qquad (227)$$

ou, en ordonnant par rapport à la variable n :

$$H_n = \left\{ \begin{array}{l} h_0 + (n-1)l \\ - \left(\frac{A^2}{2Q^2}\right) l^3\Sigma n^2 \\ + \left(\frac{3A^4}{8Q^4} \mp \frac{Ab}{Q^2(lN)^3}\right) l^5\Sigma n^4 \\ - \left(\frac{5A^6}{16Q^6} \mp \frac{3A^3b}{2Q^4(lN)^3} + \frac{b^2}{2Q^2(lN)^6}\right) l^7\Sigma n^6 \end{array} \right\}. \qquad (228$$

Digitized by Google

Effectuant les sommations indiquées et passant à la limite, en observant que dans ce cas $l^{a+1}\Sigma n^a = \frac{(ln)^{a+1}}{a+1} = \frac{S_n^{a+1}}{a+1}$, on a :

$$H_n = S_n - \left(\frac{A^2}{6Q^2}\right) S^3_n + \left(\frac{3A^4}{40Q^4} \mp \frac{Ab}{5Q^2S^3_n}\right) S^5_n - \left(\frac{5A^6}{112Q^6} \mp \frac{3A^3b}{14Q^4S^3_n} + \frac{b^2}{14Q^2S^6_n}\right) S^7_n. \quad (229)$$

Cette équation renferme encore la tension horizontale Q, qui est ordinairement une des inconnues du problème. Alors pour avoir la valeur de H_n, avec une approximation suffisante dans la pratique, nous suivrons la même marche que nous avons suivie pour l'ordonnée V_n.

[198] Mettons d'abord $\frac{1}{Q^2}$ en évidence ; l'équation (229) deviendra :

$$H_n = S_n - \frac{1}{Q^2}\left\{\frac{A^2}{6}S^3_n - \left(\frac{3A^4}{40Q^2} \mp \frac{Ab}{5S^3_n}\right) S^5_n + \left(\frac{5A^6}{112Q^4} \mp \frac{3A^3b}{14Q^2S^3_n} + \frac{b^2}{14S^6_n}\right) S^7_n\right\}; \quad (230)$$

alors nous supposerons que la courbe est une chaînette, et nous substituerons aux puissances de Q dans la parenthèse leurs valeurs numériques tirées de (157) ou (161) ; ce qui donnera une équation de la forme :

$$H_n = S_n - \frac{1}{Q^2} R_0$$

qui, existant aussi à la limite pour laquelle $H_n = H_n$ et $S_n = S_n$, deviendra :

$$H_n = S_n - \frac{1}{Q^2} R_1. \quad (231)$$

De cette équation nous tirerons la valeur définitive de Q, ou mieux de $\frac{1}{Q^2}$, que nous substituerons dans la formule (230). Nous obtiendrons ainsi l'abscisse H_n avec toute l'exactitude désirable.

[199] La *longueur de la chaîne* est ordinairement une des données du problème ; elle a pour expression :

$$S_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) l \quad (232)$$

Digitized by Google

[200] La *tension horizontale* Q peut se déduire, avec une exactitude suffisante, des équations (225) ou (231), et sert alors à calculer *la tension d'un élément quelconque du polygone* par la formule :

$$t_n = \sqrt{Q^2 + \Pi^2_n}. \qquad (233)$$

[201] Enfin *la tangente de l'angle que forme un côté* n *avec l'horizontale* est donnée, comme nous le savons, par la formule :

$$\text{tang}\, \alpha_n = \frac{\Pi_n}{Q}. \qquad (234)$$

Les équations (233) et (234) se calculent en prenant pour Π_n sa valeur (212).

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Digitized by Google

Digitized by Google

RÉSUMÉ

DES FORMULES PRATIQUES

CONTENUES DANS LA PREMIÈRE PARTIE.

1re DIVISION.

Détermination pratique des polygones chargés de poids égaux à chaque sommet, et dont les côtés se projettent horizontalement suivant une même longueur.

1er CAS : Des ponts suspendus à tiges équidistantes, chargées de poids égaux, dans lesquels on néglige l'influence variable des poids des tiges et des câbles de suspension (*).

[202] Nous croyons devoir rappeler que pour faciliter l'application des formules à la pratique, nous avons fait deux hypothèses sur la position de l'axe desor données :

Dans les équations qui traitent des ordonnées, nous avons supposé l'axe vertical passant par l'origine du côté horizontal.

Tandis que quand il s'est agi des longueurs des abscisses et des longueurs de courbes ou de polygones, nous les avons comptées à partir du milieu de ce même côté horizontal, afin de conserver la symétrie du polygone.

[203] *Ordonnées du polygone.* Cela posé, on a la formule suivante [34] :

$$V_n = \frac{ph}{2Q}(n^2 - n); \qquad (a)$$

(*) Les formules que nous avons établies et que nous allons rappeler, se rapportent au polygone parabolique présentant un côté horizontal. Si cette condition n'était pas remplie, et si ce côté

Digitized by Google

V_n ordonnée d'un sommet quelconque de rang n;

n numéro du sommet considéré, compté à partir de l'axe vertical;

p poids constant supporté par chaque sommet du polygone;

h projection horizontale constante d'un des côtés du polygone, ou distance constante des tiges de suspension;

Q composante horizontale constante des tensions.

Les longueurs sont exprimées en mètres et les poids en kilogrammes pour toutes les quantités en question.

horizontal était remplacé par un sommet, on emploierait pour les procédés graphiques les considérations développées dans le paragraphe [32].

Si l'on voulait tenir compte de cette modification dans les formules du polygone parabolique, on remplacerait les relations [31] par les suivantes :

$$P_1 = \frac{p}{2}$$

$$P_2 = \frac{3p}{2}$$

$$P_3 = \frac{5p}{2}$$

$$P_4 = \frac{7p}{2}$$

$$\vdots$$

$$P_n = \frac{(2n-1)p}{2},$$

et l'équation [32] deviendrait alors pour le nouveau polygone

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{ph}{2Q}[1+3+5+\ldots\ldots+(2n-3)] \\ &= \frac{ph}{2Q}\Sigma^{n-1}(2n-1) = 2\Sigma^{n-1}(n) - \Sigma^{n-1}(1) \\ &= \frac{ph}{2Q}(n^2-2n+1). \end{aligned}$$

La même marche devrait être suivie pour toutes les autres formules si, dans le polygone, on voulait remplacer le côté horizontal par un sommet. Mais nous ne continuerons pas ici ces modifications de formules, attendu que, dans la pratique, cette dernière disposition est très-rarement employée et qu'il est toujours possible de lui substituer celle du polygone à côté horizontal pour lequel les équations du mémoire sont établies.

Digitized by Google

π étant le poids par mètre courant du pont et de sa surcharge, $p = \pi h$;

et l'on a aussi :

$$V_n = \frac{\pi h^2}{2Q}(n^2 - n). \qquad (b)$$

[204] *Tension horizontale.* Mais ordinairement, dans les applications, la tension Q est inconnue; on a seulement la flèche totale du polygone et sa corde. La tension horizontale Q est donnée par la formule

$$Q = \frac{\pi h^2}{2V_n}(N^2 - N); \qquad (c)$$

N étant le numéro du dernier sommet du polygone;

V_n la flèche totale de ce polygone.

En substituant cette valeur de Q dans (*b*), on a :

$$V_n = \frac{V_n}{(N^2 - N)}(n^2 - n). \qquad (d)$$

Pour calculer ces ordonnées par la *méthode des différences*, on suit la marche indiquée § [83] et [84].

Les ordonnées de la courbe circonscrite au polygone sont données par la formule (40).

[205] *La longueur totale d'une tige de suspension* se compose en général de trois parties distinctes (fig. 14) :

1° De l'ordonnée du polygone des chaînes de suspension au sommet considéré;

2° D'une longueur constante D comprise entre les horizontales OX et O'X' tangentes, l'une à la courbe des chaînes, l'autre à la courbe inférieure du plancher du pont;

3° De l'ordonnée de la courbe inférieure du plancher du pont, prise par rapport à O'X' et correspondante au sommet en question.

Cette courbe inférieure a pour expression (45) de son ordonnée :

Digitized by Google

$$f = a(n^2 - n).$$

Le paramètre a doit satisfaire à la condition (46), qui est :

$$a = \frac{f_N}{N^2 - N};$$

f_N étant la flèche totale de la courbe inférieure du tablier correspondante au dernier sommet N.

Alors on a :

$$B_n = \left\{ \left(\frac{\pi h^2}{2Q} + a \right) (n^2 - n) + D \right\}; \qquad (e)$$

B_n étant la longueur de la tige de rang n.

[206] *La longueur des abscisses*, en les comptant à partir du milieu du côté horizontal, s'obtient très-simplement par la formule (50) :

$$H_n = \left(n - \frac{1}{2} \right) h. \qquad (f)$$

H_n étant l'abscisse du n^e^ sommet.

[207] *Longueur du polygone.* L_n étant la longueur du polygone depuis le milieu du côté horizontal jusqu'au sommet n inclusivement,

V_n et H_n l'ordonnée et l'abscisse de ce sommet n, on a, formule (59), pour les cas ordinaires de la pratique :

$$L_n = \left\{ H_n + \frac{2\,V^2_n}{3\,H_n} \right\}. \qquad (g)$$

Les équations (61) et (62) donnent *la longueur de la courbe parabolique de même corde et même flèche que ce polygone.* L'équation (61) devient, en y remplaçant $\frac{\pi}{Q}$ par sa valeur $\frac{2y}{x^2}$, tirée de (37) :

$$S = \left\{ x + \frac{2y^2}{3x} - \frac{2y^4}{5x^3} + \frac{4y^6}{7x^5} - \frac{10y^8}{9x^7} \right\}. \qquad (i)$$

Digitized by Google

[208] *Tension des côtés du polygone.* t_n étant la tension que supporte le côté du polygone placé entre les sommets n et $n+1$, on a (64) :

$$t_n = \sqrt{Q^2 + n^2 p^2}. \qquad (h)$$

Si Q n'est pas déterminé, on se sert de la formule (65) qui est :

$$t_n = np \sqrt{\left(\frac{nh - h^2}{2V_n}\right)^2 + 1}. \qquad (h')$$

La tension de la courbe parabolique au point correspondant à t_n est donnée par la formule (67).

[209] *La tangente de l'angle* α_n que fait avec l'horizontale le côté compris entre les sommets n et $n+1$, est :

$$\text{tang } \alpha_n = \frac{2V_n}{h(n-1)}. \qquad (k)$$

La tangente de l'angle α_n, formé par le dernier élément du polygone, celui qui suit le sommet N, est par conséquent :

$$\text{tang } \alpha_n = \frac{2V_n}{h(N-1)}. \qquad (k')$$

Les procédés graphiques pour la détermination des éléments du polygone parabolique sont développés paragraphes [104] et suivants.

[210] Appliquons maintenant ces formules aux données suivantes :

$V_n = 15^m,84$ ordonnée du sommet N ;
$H_n = 97^m,80$ abscisse de ce sommet N ;
$N = 81$, nombre total des tiges ;
$h = 1^m,215$ distance entre deux tiges consécutives ;
$D = 1^m,50$ distance entre les horizontales tangentes, l'une à la courbe des chaînes, l'autre à la courbe inférieure du tablier du pont ;
$f_n = 1^m,10$ flèche totale du tablier, correspondant au sommet N ;

Digitized by Google

$\frac{V_n}{H_n} = 0,162$

$1580^{kil.}$ poids du tablier du pont et de sa surcharge par mètre courant de l'horizontale ;

$1920^{kil.}$ poids du tablier et de sa surcharge supporté par chaque sommet du polygone.

Le poids total du système P se compose de trois parties :

1° Du poids du tablier et de sa surcharge qui est égal à $1920^{kil.} \times N$;

2° Du poids des câbles;

3° De celui des tiges.

Or, d'après la note 2, la somme des longueurs des tiges est :

$$\Sigma^n y = \left(\frac{V_n + f_n}{3}\right)(N+1) + ND = \frac{15.84 + 1.10}{3} \times 82 + 81 \times 1^m,50 = 584^m,527.$$

Le poids total de ces tiges, en supposant que le poids par mètre courant soit 5 kil., est :

$$\Theta_n = 2922^{kil.},635.$$

Le poids total des câbles est de même égal au poids par mètre courant de ces câbles multipliés par leur longueur L.

La longueur L s'obtient en prenant dans *le tableau n°* 1, le nombre de la colonne 5 correspondant à $\frac{V_n}{H_n} = 0,162$, et multipliant ce nombre par $H_n = 97,80$; on trouve ainsi $L = 99^m,511$. Le poids par mètre courant des câbles est donné, *note n°* 1, 1er cas, par la formule :

$$\gamma = \frac{t'(P' + \Omega)\omega}{1000 - \omega L t'}.$$

dans cette formule t' est le nombre de la colonne 7 qui correspond à $\frac{V_n}{H_n} = 0,162$ dans *le tableau n°* 1.

P' est la somme des poids du plancher et de la partie des tiges comprise entre les tangentes horizontales :

Digitized by Google

$$P' = (1920^{kil.} \times N) + (N.D.\,5^{kil}) = 156127^{kil.},5\,;$$

Ω poids de la partie des tiges en dehors des tangentes horizontales aux courbes des chaînes et du tablier.

D'après la note 2, la longueur de cette partie des tiges est :

$$\left(\frac{V_n + f_n}{3}\right)(N+1) = 463^m,027\,;$$

multipliant par 5 kil., poids du mètre courant des tiges, on a :

$$\Omega = 2315^{kil.},135.$$

ω est le poids d'une barre de fer de 1 mètre de longueur capable de supporter 1000 kil. On obtient la valeur de ω en divisant 1000 kil. par 10 kil. qui est le poids qu'on veut faire supporter au fer par millimètre carré de section ; on a la section 100 $^m/_m{}^2$ de la barre de fer ; cette section, d'après *le tableau n°* 3 à la fin du mémoire, correspond à $0^{kil.},78$ par mètre courant, on a donc :

$$\omega = 0^{kil.},78.$$

Du reste $L = 99^m,511$, par conséquent

$$\gamma = 535^{kil.},87.$$

Le poids total des chaînes est :

$$\Gamma_n = \gamma L.$$

Alors le poids total du système est :

$$P = P' + \Omega + \Gamma_n = 211767^{kil.},594$$

et

$$p = \frac{P}{N} = 2614^{kil.},414 \qquad \pi = \frac{p}{h} = 2151^{kil.},781.$$

π est le poids par mètre courant de l'horizontale du système total et de la surcharge.

Digitized by Google

[211] Cela posé, la formule (*c*) devient :

$$Q = \frac{ph}{2V_N}(N^2 - N) = \frac{2614^{kil.},414 \times 1.215}{2. \times 15,84} \times 6480 = 649741^{kil.},3.$$

[212] Si maintenant nous voulons avoir les éléments du polygone correspondant au trentième sommet par exemple, nous aurons $n = 30$ et l'une des formules (*a*), (*b*) ou (*d*) donnera l'ordonnée. (*a*) donne :

$$V_{30} = \frac{ph}{2Q}(n^2 - n) = \frac{2614,414 \times 1.215}{2 \times 649741,3} \times 870 = 2^m,1273.$$

[213] La longueur de la trentième tige sera, formule (*e*), puisque

$$a = \frac{f_N}{N^2 - N} = \frac{1.10}{6480} = 0,0001698,$$

$$B_{30} = \left\{\left(\frac{\pi h^2}{2Q} + a\right)(n^2 - n) + D\right\} = [(0,0023501 + 0,0001698)\,870 + 1.50] = 3^m,6923.$$

[214] L'abscisse H_n, d'après la formule (*f*) est :

$$H_{30} = \left(n - \frac{1}{2}\right) h = 29,5 \times 1^m,215 = 35^m,8425.$$

[215] La longueur du polygone correspondante à ce trentième sommet s'obtient au moyen de la formule (*g*) :

$$L_{30} = H_{30} + \frac{2\,V^2_{30}}{3\,H_{30}} = \left\{35^m,8425 + \frac{2 \times \overline{2,1273}^2}{3 \times 35,8425}\right\} = 35^m,9267.$$

En calculant la longueur totale du polygone, jusqu'au sommet N, on arrive à :

$$L_N = 99^m,5104.$$

La formule (*i*) donne pour la longueur de la parabole de même flèche et même corde que le polygone :

$$L_N = 99^m,484369.$$

Digitized by Google

[216] Pour avoir la tension du trentième côté du polygone, on se sert de la formule (h) qui devient

$$t_{30} = \sqrt{Q^2 + n^2p^2} = \sqrt{429115442535^{\text{kil.}},249} = 655069^{\text{kil.}},036.$$

[217] L'angle que fait ce trentième côté du polygone avec l'horizontale se déduit de la formule (k) :

$$\text{tang. } \alpha_{30} = \frac{2V_n}{h(n-1)} = \frac{2 \times 2,1273}{1,215 \times 29} = 0,1207727$$

$$\text{log. } 0,1207727 = \bar{1},0819688$$

$$\text{log. tang. } \alpha_{30} = 9,0819688$$

$$\alpha_{30} = 6°53'10'',1.$$

Ce calcul est seulement utile quelquefois pour le dernier côté du polygone. En effectuant alors les opérations analogues pour ce dernier côté, avec les données précédentes, on trouve :

$$\alpha_n = 18°3'10''.$$

[218] L'emploi du calcul numérique ou du calcul graphique pour les éléments du polygone, dépend du degré d'exactitude qu'on veut obtenir ; les calculs graphiques sont souvent suffisamment exacts et par conséquent souvent préférés à cause de leur promptitude.

Quelquefois on calcule les ordonnées du polygone parabolique par la méthode des différences développée paragraphe [83].

Dans le calcul d'un avant-projet, on se sert du tableau n° 1 qui donne :

1° La tangente de l'angle formé par le dernier élément du câble avec l'horizontale, en fonction du rapport $\frac{V_n}{H_n}$;

2° La longueur de la chaîne en fonction de la demi-corde H_n ;

3° La tension du dernier élément du câble en fonction du poids total du pont et de sa surcharge ;

4° La composante horizontale des tensions en fonction de ce même poids.

Digitized by Google

Si nous reprenons les calculs précédents avec ce tableau, nous chercherons d'abord dans la colonne 2 le rapport $\frac{V_n}{H_n}$ qui se rapproche le plus de notre rapport $\frac{V_n}{H_n} = 0,162$; c'est 0,162; le nombre correspondant de la colonne 5 est 1,017496; nous multiplierons ce dernier nombre par la valeur $H_n = 97^m,80$ et nous aurons :

$$S_n = 1,017496 \times 97,80 = 99^m,511.$$

Si nous n'avions pas trouvé dans la colonne 2 notre rapport $\frac{V_n}{H_n}$, nous aurions pris le rapport le plus approché et nous aurions déduit par une proportion le nombre de la colonne 5 qui doit correspondre au rapport $\frac{V_n}{H_n}$ en question.

Nous obtiendrions la tension t_n du dernier élément du câble en multipliant le poids total $Np = 211767^{kil.},594$ par le nombre de la colonne 7 qui correspond à $\frac{V_n}{H_n} = 0,162$. Nous aurions la composante horizontale Q en multipliant ce même poids $211767^{kil.},594$ par le nombre de la colonne 8 qui correspond à ce rapport $\frac{V_n}{H_n} = 0,162$.

2e CAS : Des ponts suspendus à tiges équidistantes, en tenant compte de l'action réelle du poids des tiges et des câbles de suspension.

[219] Appelons :

V_n l'ordonnée d'un sommet quelconque n du polygone ;

n le numéro du sommet considéré ;

P_n la somme des poids donnés qui agissent sur tous les sommets jusqu'au sommet n inclusivement, indépendamment du poids des tiges et des câbles ;

Γ_n le poids de la portion des câbles qui agit sur ce même sommet ;

Θ_n la somme du poids de toutes les tiges qui agissent aussi sur ce sommet ;

Digitized by Google

Π_n la somme de tous les différents poids qui agissent sur tous les sommets jusqu'au $n^{ième}$ inclusivement;

Ω la somme totale des poids des portions de tiges en dehors des horizontales tangentes, l'une à la courbe des chaînes, l'autre à la courbe inférieure du tablier;

h la projection horizontale constante d'un des côtés quelconques du polygone;

Q la composante horizontale constante des tensions;

V_n l'ordonnée du dernier sommet N ou la flèche des câbles;

H_n l'abscisse de ce dernier sommet;

f^n l'ordonnée de la courbe inférieure du tablier correspondant au sommet N;

D distance constante entre les parallèles horizontales, tangentes aux courbes des chaînes et du tablier;

p partie du poids uniformément réparti, attribuée à chaque tige;

π poids uniformément réparti par mètre courant de l'horizontale.

On a $p = \pi h$ comme dans le cas précédent.

Dans le poids total uniformément réparti, il entre le poids des tiges comprises entre les tangentes horizontales.

γ poids par unité de longueur des câbles.

[220] *Ordonnées du polygone.* Cela posé, nous avons, formule (98), l'ordonnée :

$$V_n = \{ A_1 n^4 - B_1 n^3 + C_1 n^2 - D_1 n \}. \qquad (l)$$

Dans cette équation, les coëfficients sont donnés par les relations (99);

$$A_1 = \frac{h^4}{4Q} \left\{ \frac{2\gamma V^2_n}{3H^4_n} + \frac{\Omega}{H^3_n} \right\}$$

$$B_1 = \frac{h^4}{2Q} \left\{ \frac{2\gamma V^2_n}{3H^4_n} + \frac{\Omega}{H^3_n} \right\}$$

$$C_1 = \frac{h^4}{4Q} \left\{ \frac{2\gamma V^2_n}{3H^4_n} + \frac{\Omega}{H^3_n} \right\} + \frac{h}{2Q} \{ p + \gamma h \}$$

$$D_1 = \frac{h}{2Q} \{ p + \gamma h \}.$$

Digitized by Google

Cette formule des ordonnées se simplifie beaucoup en prenant l'équation (102) de la courbe qui passe par les sommets du polygone et ramenant cette équation à la forme pratique (106) qui est d'une exactitude suffisante, savoir :

$$V_n = \frac{1}{Q}\left\{\left(\frac{\pi+\gamma}{2}\right) h^2(n^2-n) + \left(\frac{\gamma V^2_n}{6N^4} + \frac{h\Omega}{4N^3}\right) n^4\right\}, \qquad (l')$$

laquelle n'a plus que deux termes.

[221] *La composante horizontale* Q s'obtient par la formule (107) :

$$Q = \frac{1}{V_n}\left\{\left(\frac{\pi+\gamma}{2}\right) h^2(N^2-N) + \frac{\gamma V^2_n}{6} + \frac{h\Omega N}{4}\right\}. \qquad (m)$$

Cette valeur de Q étant obtenue numériquement, on calcule facilement V_n, comme nous le verrons plus loin, en appliquant les formules.

On peut encore calculer les ordonnées V_n du polygone réel par une autre méthode, qui est celle de la *courbe des différences.*

On appelle *courbe des différences* une courbe ayant pour ordonnées la différence des ordonnées correspondantes de la parabole et de la courbe réelle d'équilibre de même flèche et même ouverture.

Quand on connaît cette courbe des différences, pour avoir les ordonnées du polygone réel, il suffit de chercher les ordonnées correspondantes du polygone parabolique par les méthodes que nous avons décrites dans le cas précédent, puis de retrancher de ces ordonnées, les ordonnées correspondantes de la courbe des différences.

Cette courbe des différences a pour ordonnées, formule (122) :

$$^2V_n = \left(-{}^1A\frac{n^2}{2} + {}^1B\frac{n^4}{4}\right). \qquad (n)$$

Équation dans laquelle on a :

Digitized by Google

$$^1A = \frac{h}{Q}\{p + \gamma h - p_1\}$$

$$^1B = \frac{h}{Q}\left\{\frac{2\,V^2_n}{3\,H^4_n}\gamma h^3 + \frac{\Omega h^3}{H^3_n}\right\};$$

$$p^1 = \frac{p'Q_1}{Q};$$

p' poids supporté par chaque sommet du polygone parabolique et

Q_1 la composante horizontale de ce polygone.

[222] *Les abscisses* font ordinairement partie des données du problème; on a, formule (124) :

$$H_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) h. \qquad (o)$$

[223] *La longueur totale* du demi-arc de la *courbe réelle d'équilibre* est, formule (140) :

$$L_n = H_n + \frac{2\,V^2_n}{3\,H_n}\left\{1 + \frac{2\gamma V^2_n + 3\Omega H_n}{15(\pi+\gamma)H^2_n}\right\}. \qquad (p)$$

[224] *Différence entre l'arc parabolique et celui de la courbe réelle de même flèche et même corde.* En comparant cette valeur avec celle de l'arc parabolique de même flèche et même corde, on a pour différence

$$\Delta l = \frac{2\,V^2_n}{H_n}\left\{\frac{2\gamma V^2_n + 3\Omega H_n}{15(\pi+\gamma)H^2_n}\right\}. \qquad (q)$$

[225] *Différence de flèche entre la parabole et la courbe réelle de même longueur d'arc.* La courbe réelle d'équilibre de même longueur d'arc que la parabole ayant même ouverture, a une flèche plus petite que celle de cet arc parabolique; la différence est exprimée par :

$$\Delta V_n = \frac{V_n}{2}\left\{\frac{2\gamma V^2_n + 3\Omega H_n}{15(\pi+\gamma)H^2_n}\right\}. \qquad (r)$$

[226] *La longueur exacte* de chacun des côtés du polygone réel d'équilibre s'obtient par la formule

Digitized by Google

$$l_n = h\left(1 + \frac{\Pi_n}{Q}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad (s)$$

dans laquelle on a (129) :

$$\Pi_n = Ahn + Bh^2n^2$$

$$A = (\pi + \gamma) \qquad B = \left\{\frac{2\gamma V^2_n}{3H^4_n} + \frac{\Omega}{H^2_n}\right\}.$$

[227] *La tension d'un élément quelconque du câble* est donnée par la formule (152) :

$$t_n = \sqrt{Q^2 + \Pi^2_n}, \qquad (t)$$

dans laquelle Π_n et Q ont les valeurs indiquées plus haut.

[228] *La tangente* de l'angle formé par un côté quelconque du polygone avec l'horizontale est :

$$\text{tang. } \alpha_n = \frac{\Pi_n}{Q}. \qquad (u)$$

Les procédés graphiques servant à déterminer les éléments du polygone sont décrits paragraphes [153] et [156].

[229] *Applications.* Reprenons maintenant les mêmes données que dans le cas où nous négligions l'influence variable du poids des tiges et des câbles de suspension et appliquons les formules.

Ici le poids p se compose du poids 1920 kil. du tablier supporté par chaque tige, augmenté du poids de la partie de la tige comprise entre les deux tangentes horizontales. Chaque poutrelle étant supportée par deux tiges, en supposant que le poids par mètre courant de ces deux tiges réunies soit 5 kil., pour avoir p il faudra augmenter 1920 kil. de $5^{\text{kil.}} \times D = 5 \times 1{,}50 = 7^{\text{kil.}}{,}50$; ainsi on aura :

$$p = 1927^{\text{kil.}}{,}50$$

par conséquent

Digitized by Google

$$\pi = \frac{1927^{\text{kil.}},50}{h} = \frac{1927^{\text{kil.}},50}{1.215} = 1586^{\text{kil.}},42.$$

Nous savons du reste, d'après ce qui a été dit dans le *premier cas*, que :

$$\Omega = 2315^{\text{kil.}},135 \qquad \gamma = 535^{\text{kil.}},87$$
$$\Theta_n = 2922^{\text{kil.}},635 \qquad P_n = 156127^{\text{kil.}},5$$
$$\Gamma_n = 53324^{\text{kil.}},959.$$

Le poids total du système que les chaînes ont à supporter est :

$$\Pi_n = P_n + \Gamma_n + \Omega = 211767^{\text{kil.}},594.$$

Ainsi les données du problème seront :

$p = 1927^{\text{kil.}},5$	$P_n = 156127^{\text{kil.}},5$	$N = 81$
$\pi = 1586^{\text{kil.}},42$	$\Theta_n = 2922^{\text{kil.}},635$	$h = 1^{\text{m}},215$
$\gamma = 535^{\text{kil.}},87$	$\Gamma_n = 53324^{\text{kil.}},96$	$D = 1^{\text{m}},50$
$\Omega = 2315^{\text{kil.}},135$	$H_n = 97^{\text{m}},80$	$f_n = 1^{\text{m}},10$
$\Pi_n = 211767^{\text{kil.}},594$	$V_n = 15^{\text{m}},84$	$\frac{V_n}{H_n} = 0,162.$

[280] La formule (m) donnera la composante horizontale :

$$Q = \frac{1}{V_n}\left[1061,145 \times 1,476225 \times 6480 + 22408,797 + 56961,003\right] = 645847^{\text{kil.}},1.$$

En comparant cette valeur avec celle de la composante horizontale du polygone parabolique, on voit que la composante horizontale des tensions est plus faible dans la courbe réelle d'équilibre que dans la courbe parabolique : ce qui devait être, puisque la courbure de la courbe réelle est plus prononcée vers la culée que celle de la parabole. La différence entre ces deux composantes horizontales est :

$$649741^{\text{kil.}},3 - 645847^{\text{kil.}},1 = 3894^{\text{kil.}},2.$$

Digitized by Google

[231]. Cette valeur de Q étant connue, on peut calculer la valeur de l'ordonnée V_n d'après la formule (l) ou (l').

En supposant encore $n = 30$, la formule (l') donnera pour l'ordonnée du trentième sommet :

$$V_{30} = \frac{1}{645847}\left[1'362'845,23653375 + (0,0005206 + 0,001323)\,810000\right] = 2^m,1125.$$

La différence de cette ordonnée avec l'ordonnée correspondante de la parabole trouvée plus haut est :

$$2^m,1273 - 2^m,1125 = 0^m,0148;$$

Cette différence assez sensible entre les ordonnées en question, et par conséquent entre les tiges du trentième sommet dans les deux cas dont on parle, fait sentir la nécessité d'employer les formules relatives à la courbe réelle d'équilibre dans les constructions un peu importantes.

Pour avoir toutes les ordonnées du polygone, il faudrait résoudre l'équation (l') pour toutes les valeurs de n depuis 1 jusqu'à 81 ; le calcul que nous venons d'indiquer demanderait beaucoup de temps pour donner toutes les valeurs des ordonnées ; aussi est-il convenable ici d'employer le *calcul mixte*. On calcule numériquement, une fois pour toutes, les coefficients constants

$$\frac{1}{Q}\left\{\left(\frac{\pi+\gamma}{2}\right)h^2\right\} = A \quad \text{et} \quad \frac{1}{Q}\left\{\frac{\gamma V^2_n}{6N^4} + \frac{h\Omega}{4N^3}\right\} = B$$

de l'équation (l'), et l'on résout graphiquement l'équation résultante, qui est de la forme :

$$V_n = A(n^2 - n) + Bn^4.$$

Pour cela on assimile chacun des deux termes du second membre à l'équation d'une ligne droite; on pose :

$$y = A(n^2 - n) = Ax \quad \text{et} \quad y' = Bn^4 = Bz; \qquad (r)$$

Digitized by Google

Chacune de ces relations doit subsister à la limite pour laquelle $n = N$, $y = Y$, $y' = Y'$, $x = X$, $z = Z$; alors la première relation devient :

$$Y = AX = A(N^2 - N).$$

Si donc, sur une droite indéfinie nous prenons une longueur $OA = N^2 - N$ (fig. 37), si au point A nous élevons AB perpendiculaire sur OA, et égale à Y ou A $(N^2 - N)$, qui est facile à calculer, nous aurons en joignant OB une droite qui fera avec OA un angle dont la tangente sera égale au coefficient A de la première relation (r);

Si maintenant, à partir de O, nous prenons sur OA des longueurs égales à $(n^2 - n)$ pour les différentes valeurs de n, $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots 81$, en élevant des perpendiculaires sur OA aux extrémités de ces différentes longueurs, nous aurons, par les rencontres de ces perpendiculaires avec OB, des longueurs égales à y correspondantes à ces différentes valeurs de n. En opérant de même pour la deuxième relation $y' = Bn'$, c'est-à-dire en prenant $O'A' = N' = \overline{81}^4$, (fig. 38); puis élevant $A'B' = BN'$ et joignant $O'B'$, nous aurons tang $A'O'B' = B$. Alors portant sur $O'A'$ des longueurs égales aux différentes valeurs de n', nous aurons, par des perpendiculaires, les différentes valeurs de y' correspondantes.

Puis ajoutant ces valeurs à celles de y trouvées précédemment, nous aurons toutes les valeurs de V_n.

Ce calcul graphique se fait très-promptement au moyen du tableau n° 2, à la fin du mémoire; tableau qui donne les valeurs de $n^2 - n$ et n' correspondantes aux différentes valeurs de n, depuis $n = 1$ jusqu'à $n = 100$.

[232] Le calcul des ordonnées du polygone réel peut encore se faire par la méthode de la *courbe des différences*, comme nous l'avons dit plus haut. On détermine les ordonnées ^2V_n de la courbe des différences (équation (n)), par le procédé graphique que nous venons d'employer, et l'on retranche ces ordonnées des ordonnées correspondantes de la parabole, cal-

Digitized by Google

culées soit graphiquement, soit par la méthode des différences exposées plus haut, soit enfin directement.

[233] L'abscisse du trentième sommet sera d'après la formule (o) :

$$H_{30} = \left(30 - \frac{1}{2}\right) 1{,}215 = 35^m{,}8425.$$

[234] La formule (p) donnera la longueur totale de la courbe réelle :

$$L_n = H_n + \frac{2\,V^2_n}{3\,H_n}\left\{1 + \frac{2\gamma V^2_n + 3\Omega H_n}{15\,(\pi + \gamma) H^2_n}\right\} = 97^m{,}80 + 1{,}71033 \times 1{,}00311394 = 99^m{,}5157.$$

[235] La différence de longueur de ce polygone réel avec le polygone parabolique de même flèche et même ouverture est donnée par la formule (q) :

$$\Delta l = \frac{2\,V^2_n}{3\,H_n}\left\{\frac{2\gamma V^2_n + 3\Omega H_n}{15(\pi + \gamma) H^2_n}\right\} = 1{,}71033 \times 0{,}00311394 = 0^m{,}0053259.$$

Cette valeur de Δl ajoutée à la longueur du polygone parabolique $99^m{,}5104$ donne bien en effet la longueur du polygone réel $99^m{,}5157$.

En ajoutant Δl à la longueur de la parabole de même flèche et même corde que le polygone parabolique, et qui est, comme nous l'avons vu, $99^m{,}484369$, on a pour la longueur de la courbe réelle de même flèche et même corde $99^m{,}489595$.

[236] Si nous voulions avoir la différence de flèche entre la parabole et la courbe réelle de même ouverture et de même longueur d'arc, nous prendrions la formule (r) qui donne :

$$\Delta V_n = \frac{V_n}{2}\left\{\frac{2\gamma V^2_n + 3\Omega H_n}{15(\pi + \gamma) H^2_n}\right\} = 7{,}92 \times 0{,}00311394 = 0^m{,}0247.$$

Les deux relations Δl et ΔV_n font voir que, si la courbe réelle, de $0^m{,}0053$ plus longue que la parabole de même flèche et même corde, vient à diminuer de longueur, de manière à égaler la parabole, sa flèche diminue

Digitized by Google

de $0^m,0247$. Ainsi une faible variation dans la longueur de la courbe en donne une assez sensible dans la flèche.

[237] Pour calculer séparément la longueur de chacun des côtés du polygone réel, on emploie la formule (s) dans laquelle on a :

$$\Pi_n = Ah.n + Bh^2n^2$$

$$A = (\pi + \gamma) \qquad B = \left\{\frac{2\,\gamma V^2_n}{3\,H^4_n} + \frac{\Omega}{H^2_n}\right\}.$$

On cherche par le calcul graphique les différentes valeurs de Π_n qui servent alors à calculer les valeurs correspondantes de l_n.

[238] La tension de chaque élément du câble s'obtient au moyen de ces valeurs de Π_n avec la formule (t). La tension du dernier élément est :

$$t_n = \sqrt{Q^2 + \Pi^2_n} = 679679^{\text{kil.}},000.$$

[239] La formule (u) donne pour la tangente de l'angle que fait le dernier côté, après le sommet N, avec l'horizontale

$$\text{tang}\ \alpha_n = \frac{\Pi_n}{Q} = 0,3278912$$

$$\log\ 0,3278912 = \bar{1},5157298$$

$$\log\ \text{tang}\ \alpha_n = 9,5157298$$

et l'on a :

$$\alpha_n = 18°9'10'',39$$

pour l'angle que fait ce dernier élément du polygone avec l'horizontale. Cet angle est plus grand que celui du dernier élément du câble parabolique; ce qui doit être, puisque la courbe réelle est plus creusée près des culées que la parabole.

Digitized by Google

2e DIVISION.

Détermination pratique des polygones chargés de poids égaux à chaque sommet et dont la longueur des côtés est constante.

1er CAS : Des ponts suspendus dont les tiges sont également espacées sur la chaîne et dont la charge est supposée uniformément répartie sur la chaîne.

[240] Soient :

V_n l'ordonnée d'un sommet quelconque du polygone;

n le numéro du sommet considéré, toujours compté à partir de l'axe vertical divisant le polygone en deux parties symétriques;

p poids constant supporté par chaque sommet;

π poids par mètre de longueur sur les chaînes;

Π poids total du système $= Np$;

l longueur constante des côtés du polygone;

N numéro de la dernière tige;

H_n l'abscisse d'un sommet quelconque de rang n;

V_N l'ordonnée, H_N l'abscisse } du dernier sommet N;

f_N la flèche du tablier correspondant au sommet N;

S la longueur, y l'ordonnée, x l'abscisse } d'un arc de chaînette;

t_n la tension d'un côté quelconque situé après le n^e sommet;

Q la composante horizontale constante des tensions.

[241] *Ordonnées du polygone.* Quand la charge est répartie uniformément sur la longueur de la courbe, cette courbe est une *chaînette.* D'après la formule (155), cette chaînette a pour expression de ses ordonnées :

Digitized by Google

$$y = S\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi S}{Q}\right) - \frac{1}{2\times 4}\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^3 + \frac{3}{8\times 6}\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^5 - \frac{5}{16\times 8}\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^7\right\}. \qquad (a)$$

Le polygone d'équilibre a pour ordonnées, formule (156),

$$V_n = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{Q}\right) l^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^3 l^4\left(n-\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^5 l^6\left(n-\frac{1}{2}\right)^6 - \frac{5}{128}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^7 l^8\left(n-\frac{1}{2}\right)^8\right\}. \qquad (b)$$

(*Voir la note n°* 6.)

[242] *Les abscisses* de la chaînette et celles du polygone, sont données respectivement par les formules (158) et (159) qui sont :

$$x = S\left\{1 - \frac{1}{2\times 3}\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^2 + \frac{3}{8\times 5}\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^4 - \frac{5}{16\times 7}\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^6 + \frac{35}{128\times 9}\left(\frac{\pi S}{Q}\right)^8\right\} \qquad (c)$$

$$H_n = \left\{\left(n-\frac{1}{2}\right) l - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^3 l^3\right\}. \qquad (d)$$

[243] *Composante horizontale.* Dans chacune des quatre formules précédentes la valeur de la composante Q est celle qu'on déduit de l'une des deux équations (157) ou (161) qui suivent :

$$\frac{\pi S}{Q} = 2\left\{\left(\frac{y}{S}\right) + \left(\frac{y}{S}\right)^3 + \left(\frac{y}{S}\right)^5 + \left(\frac{y}{S}\right)^7 + \ldots\ldots\right\} \qquad (e)$$

$$\frac{\pi S}{Q} = \sqrt{6\left(\frac{S-x}{S}\right)}\left\{1 + 1{,}35\left(\frac{S-x}{S}\right) + 1{,}559\left(\frac{S-x}{S}\right)^2 + 1{,}602\left(\frac{S-x}{S}\right)^3 + \ldots\right\}. \qquad (e')$$

On déduit Q de la première ou de la deuxième équation, suivant qu'on connaît la flèche y ou l'abscisse x avec l'arc S correspondant.

[244] On peut encore avoir y en fonction de x ou réciproquement d'après les formules (165) et (166) qui sont :

$$y = S\sqrt{\frac{S-x}{S}}\left\{1{,}225 - 0{,}18375\left(\frac{S-x}{S}\right) - 0{,}0196\left(\frac{S-x}{S}\right)^2 - 0{,}13414\left(\frac{S-x}{S}\right)^3\right\} \qquad (\alpha)$$

$$S\left\{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{S}\right)^2 - \frac{2}{15}\left(\frac{y}{S}\right)^4 - \frac{2}{35}\left(\frac{y}{S}\right)^6\right\}. \qquad (\gamma)$$

Digitized by Google

[245] *La longueur du polygone* est ordinairement une des données du problème; elle a pour expression (162),

$$L_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) l. \qquad (f)$$

[246] *La longueur de l'arc de chaînette* en fonction de la flèche et de la corde correspondante est (194),

$$S = x \left\{1 + \frac{2}{3}\frac{y^2}{x^2} - 0{,}311\,\frac{y^4}{x^4} + 0{,}277\,\frac{y^6}{x^6} - 0{,}477\,\frac{y^8}{x^8}\right\}. \qquad (g)$$

[247] *La tension d'un côté* du polygone s'obtient par la formule (163) :

$$t_n = Q\sqrt{1 + \left(\frac{\Pi_n}{Q}\right)^2}. \qquad (g)$$

[248] *La tangente* de l'angle formé par le côté qui suit le sommet n avec l'horizontale, a pour expression, formule (164),

$$\text{tang}\,\alpha_n = \frac{\Pi_n}{Q}. \qquad (h)$$

Les procédés graphiques employés pour la détermination des éléments du polygone d'équilibre, sont développés section 12e § [167] et suivants.

Des rapports entre l'arc, la flèche et la corde de la chaînette et les éléments correspondants de la parabole.

Différence de flèche. Dans ce qui va suivre, on représente par S, y et x l'arc, l'ordonnée et l'abscisse de la chaînette et par C, f et h les éléments correspondants de la parabole.

[249] 1° *Flèche de la chaînette en fonction des éléments de la parabole.* Δ étant la fraction qui exprime de combien la flèche de la parabole, prise pour

Digitized by Google

unité, l'emporte sur celle de la chaînette de même longueur d'arc et de même corde; on a (170) et (177),

$$\left.\begin{aligned} y &= f - \Delta f \\ \Delta &= \frac{4}{15}\frac{f^2}{h^2} - 0{,}143\frac{f^4}{h^4} \end{aligned}\right\} \qquad (i)$$

alors

$$y = f\left(1 - 0{,}0666\frac{f^2}{h^2} + 0{,}143\frac{f^4}{h^4}\right).$$

[250] 2° *Flèche de la parabole en fonction des éléments de la chaînette.* Si au contraire, connaissant les éléments de la chaînette, on voulait avoir, en fonction de ces éléments, la flèche de la parabole, on se servirait des formules (179), (187) et (188) rappelées ci-dessous :

$$\left.\begin{aligned} f = y(1+\Delta_1) &= y\left(1 + 0{,}0666\frac{y^2}{x^2} - 0{,}1297\frac{y^4}{x^4}\right) \\ \Delta_1 &= \frac{1}{15}\frac{y^2}{x^2} - 0{,}1297\frac{y^4}{x^4} \end{aligned}\right\}. \qquad (i')$$

La flèche de la chaînette étant prise pour unité, Δ_1 est la fraction qui exprime de combien la flèche de la chaînette est plus petite que celle de la parabole.

[251] Différence de longueur d'arcs. 1° *En fonction des éléments de la parabole.* La chaînette de même flèche et même corde que la parabole a une longueur d'arc plus grande que cette parabole.

Si nous appelons δ la fraction qui exprime la différence cherchée, la longueur de l'arc parabolique étant prise pour unité, on a (195) :

$$\delta C = S - C = h\left(0{,}089\frac{f^4}{h^4} - 0{,}294\frac{f^6}{h^6} + 0{,}634\frac{f^8}{h^8}\right). \qquad (k)$$

[252] 2° *En fonction des éléments de la chaînette.* Pour avoir la différence cherchée en fonction des éléments de la chaînette, on emploie la formule (197) :

Digitized by Google

$$\delta_1 S = x\left(0{,}089\,\frac{y^4}{x^4} - 0{,}294\,\frac{y^6}{x^6} + 0{,}634\,\frac{y^8}{x^8}\right) \qquad (k')$$

dans laquelle, en prenant la longueur S pour unité, δ_1 est la fraction qui exprime de combien l'arc de la chaînette surpasse en longueur celui de la parabole de même flèche et même corde.

Relations entre la flèche et la longueur de l'arc de la chaînette.

[253] *Allongement de l'arc de la chaînette pour une augmentation donnée de flèche.* ΔS étant l'allongement de la chaînette correspondant à une augmentation δy donnée dans la fleche, on a, formule (200) :

$$\Delta S = x\left\{\begin{array}{l} \delta\left(\frac{4}{3}\,\frac{y^2}{x^2} - 1{,}245\,\frac{y^4}{x^4} + 1{,}663\,\frac{y^6}{x^6}\right) \\ + \delta^2\left(\frac{2}{3}\,\frac{y^2}{x^2} - 1{,}867\,\frac{y^4}{x^4} + 4{,}158\,\frac{y^6}{x^6}\right) \\ + \delta^3\left(-1{,}245\,\frac{y^4}{x^4} + 5{,}544\,\frac{y^6}{x^6}\right) \end{array}\right\}. \qquad (l)$$

Dans la plupart des cas de la pratique, on se borne à la formule (201) :

$$\Delta S = x\delta\left(\frac{4}{3}\,\frac{y^2}{x^2} - 1{,}245\,\frac{y^4}{x^4}\right). \qquad (l')$$

[254] *Accroissement de flèche pour une augmentation donnée dans la longueur de l'arc.* Si l'on avait au contraire un accroissement donné dans la longueur de l'arc et qu'on voulût déterminer l'accroissement correspondant de la flèche de la chaînette, on emploierait la formule (202) :

$$\delta y = y\left\{\begin{array}{l} \frac{\Delta S}{x}\left(0{,}75\,\frac{x^2}{y^2} + 0{,}7005 - 0{,}281\,\frac{y^2}{x^2} - 1{,}135\,\frac{y^4}{x^4}\right) \\ + \frac{\Delta^2 S^2}{x^2}\left(-0{,}281\,\frac{x^4}{y^4} + 0{,}037 - 2{,}111\,\frac{y^2}{x^2} - 3{,}151\,\frac{y^4}{x^4}\right) \\ + \frac{\Delta^3 S^3}{x^3}\left(0{,}211\,\frac{x^6}{y^6} + 0{,}342\,\frac{x^4}{y^4} - 0{,}39\,\frac{x^2}{y^2} - 0{,}873 - 7{,}831\,\frac{y^2}{x^2} + 0{,}202\,\frac{y^4}{x^4}\right) \end{array}\right\} \qquad (m)$$

Digitized by Google

qui dans la plupart des cas de la pratique peut se réduire à deux termes, savoir :

$$\delta y = \Delta S \left(0{,}75 \frac{x}{y} + 0{,}7005 \frac{y}{x}\right). \qquad (m')$$

[255] *Applications.* Pour appliquer les formules précédentes, supposons un pont de même ouverture que dans les cas précédents et dont la flèche totale des câbles soit aussi la même. Soient donc :

$$V_n = 15^m{,}84 \qquad \Pi = 211767^{kil.}{,}594$$
$$H_n = 97^m{,}80 \qquad p = 2614^{kil.}{,}414 \qquad l = 1^m{,}235908$$
$$N = 81 \qquad \pi = \frac{p}{l} = 2115^{kil.}{,}38$$

La longueur l se déduit en divisant la longueur totale du polygone par $N - \frac{1}{2}$.

[256] La longueur de la chaînette s'obtiendra directement par la formule (φ), ou bien en cherchant d'abord la différence $\delta_1 S$, par la formule (k'), de la chaînette et de la parabole de même flèche et même ouverture et l'ajoutant à la longueur de cette parabole que nous avons trouvée dans le 1er cas $= 99^m{,}484369$.

En opérant d'après cette dernière méthode, dans (k') nous mettrons pour x et y les coordonnées extrêmes $H_n = 97^m{,}80$ et $V_n = 15^m{,}84$. Alors nous arriverons à :

$$\delta_1 S = 0^m{,}005499 ;$$

par conséquent nous aurons pour la longueur totale de la chaînette,

$$99^m{,}484369 + \delta_1 S = 99^m{,}489868 ;$$

cette longueur surpasse celle de la parabole de même ouverture et même flèche, et surpasse aussi la longueur de la courbe réelle dans le cas des tiges équidistantes.

[257] La longueur totale S étant connue, nous pouvons calculer la com-

Digitized by Google

posante horizontale Q d'après la formule (e), en mettant à la place de y la valeur $V_n = 15^m,84$ et pour S la valeur correspondante $99^m,489868$. Alors on a :

$$\frac{\pi S}{Q} = 2\left(0,1592122 + 0,0040357 + 0,000102301 + 0,0000025932\right)$$
$$= 2 \times 0,163352794 = 0,326605588$$
$$Q = \frac{\pi S}{0,326605588} = 644382^{kil},3.$$

Cette valeur de Q est plus petite que celle que nous avons trouvée dans le cas du polygone parabolique (1re division, 1er cas); cela devait être puisque vers les culées la chaînette est plus creusée que la parabole. La valeur de Q pour la chaînette étant aussi plus petite que pour la courbe réelle dans le cas des tiges équidistantes, cela indique que la chaînette, dans le cas particulier qui nous occupe, est encore plus creusée vers les culées que la courbe réelle dont nous avons parlé.

[258] Les ordonnées du polygone s'obtiendront au moyen de l'équation (b). Si nous cherchons la trentième ordonnée, pour laquelle $n = 30$, nous arriverons à :

$$V_{30} = 2^m,18188 - 0^m,00781406 + 0,00005597 - \text{etc.}$$
$$= 2^m,1741.$$

Cette ordonnée surpasse la trentième ordonnée de la parabole, mais pour pouvoir conclure d'une manière certaine quelle est la courbe la plus basse au point considéré, il faut chercher quelle est l'ordonnée de la parabole qui correspond à la même abscisse. Or l'abscisse de la chaînette correspondante à la trentième ordonnée est, d'après la formule (d),

$$H_{30} = 29,5 \times 1,235908 - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^2 \times \overline{29,5}^3 \times \overline{1,235908}^3$$
$$= 36^m,372227.$$

Alors si nous cherchons l'ordonnée de la parabole correspondante à cette abscisse, au moyen de l'équation

Digitized by Google

$$y = \frac{\pi}{2Q} x^2,$$

dans laquelle $\pi = 2151,781$; $Q = 649741,3$; $x = 36,372227$, nous trouverons :

$$y = 2^m,1906.$$

Ainsi le point de la chaînette correspondant à sa trentième ordonnée est au-dessous du point correspondant de la parabole, de $2^m,1906 - 2^m,1741 = 0^m,0165$.

Sur cette trentième ordonnée de la chaînette, la différence entre l'ordonnée de la parabole et celle de la courbe réelle dans le cas de tiges équidistantes, est, à très-peu de chose près, la même que sur la trentième ordonnée de la parabole. Or, dans ce dernier cas nous savons que la différence est $0^m,148$. L'ordonnée de la courbe réelle sur la trentième ordonnée de la chaînette est donc $2^m,1906 - 0^m,0148 = 2^m,1758$. Cette ordonnée surpasse encore celle de la chaînette de $0^m,0017$, en sorte que le point de la chaînette correspondant à sa trentième ordonnée est encore au-dessous de la courbe réelle.

[259] La longueur du polygone à chaînons égaux, correspondante à la trentième ordonnée, est, formule (f),

$$L_{30} = 29.5 \times 1^m,285908 = 36^m,459286.$$

[260] Si, connaissant la flèche f et la corde h d'une parabole, nous voulions obtenir la flèche y de la chaînette de même corde et même longueur d'arc, nous emploierions la formule (i), qui donne pour $f = 15^m,84$ et $h = 97^m,80$,

$$y = 15.84 - 0,0666 \frac{\overline{15.84}^2}{\overline{97.80}^2} + 0,143 \frac{\overline{15.84}^4}{\overline{97.80}^4}$$
$$= 15.84 - 0,027737 + 0,001558 = 15^m,8138.$$

Digitized by Google

La flèche de la chaînette aurait alors $15^m,84 - 15^m,8138 = 0^m,0261$ de moins que celle de la parabole donnée.

[261] Nous avons vu au commencement de ces applications comment on déterminait la différence de longueur de la chaînette et de la parabole de même flèche et même ouverture ; cherchons maintenant quelle variation de flèche éprouve la chaînette pour une variation donnée dans sa longueur : supposons que la chaînette, qui a $15^m,84$ de flèche, et $99^m,489868$ de longueur d'arc, diminue de longueur de manière que son arc soit égal à l'arc $99^m,484369$ de la parabole de même flèche. L'accroissement ΔS de l'arc de la chaînette sera négatif et égal à $99^m,484369 - 99^m,489868 = -0,005499$; alors la formule ($m'$) donnera pour accroissement de flèche :

$$\begin{aligned} \delta y &= -0.005499 \left(0,75 \frac{97,80}{15,84} + 0,7005 \frac{15,84}{97,80}\right) \\ &= -0,0261. \end{aligned}$$

Cette diminution de flèche est du reste la même que la différence de flèche entre la chaînette et la parabole de même longueur d'arc et même corde.

[262] Pour déterminer la tension du dernier élément du polygone, nous nous servirons de la formule (g); nous aurons

$$t_n = Q\sqrt{1 + \left(\frac{\Pi}{Q}\right)^2} = 644382,3\sqrt{1 + \frac{\overline{211767.594}^2}{\overline{644382,3}^2}} = 678287^{kil.},6.$$

[263] Enfin la valeur de la tangente de l'angle que fait le dernier élément avec l'horizontale est, formule (h),

$$\text{tang. } \alpha_n = \frac{\Pi}{Q} = \frac{211767,594}{644382,3} = 0,3286366\,;$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \text{log. tang. } \alpha_n &= 9,5167159 \\ \alpha_n &= 18°11'30'',27. \end{aligned}$$

Digitized by Google

2e CAS : Des ponts suspendus à tiges de suspension également espacées sur la chaîne, en tenant compte du poids variable dû à toutes les parties de l'appareil.

[264] Dans ce cas, le poids total Π_n placé sur tous les sommets depuis le premier jusqu'au n^e inclusivement, se décompose en *trois groupes :*

1° Les poids qui, étant proportionnels à la longueur du câble, agissent pour donner à la chaîne la forme d'une chaînette;

2° Les poids qui peuvent être considérés comme distribués sur la chaîne proportionnellement aux projections horizontales des différentes parties de celle-ci. Ces poids, comme nous le savons, tendent à faire décrire une parabole aux chaînes;

3° Les poids qui tendent à creuser la chaîne vers les culées pour forcer la courbure de la chaînette, et par conséquent éloigner la courbe de la forme parabolique en exagérant la chaînette.

La courbe réelle d'équilibre participe donc à la fois de la forme de la chaînette et de celle de la parabole, se rapprochant d'autant plus de la chaînette ou de la parabole que le premier groupe ou le deuxième sera d'autant plus important par rapport aux deux autres.

Dans le *premier groupe* on comprend :

1° Les poids qui sont propres aux chaînes de suspension;

2° Les poids dûs aux attaches des tiges de suspension avec les chaînes et avec les poutrelles, tels que les chevalets, les étriers, les boulons et leurs écrous, les frettes, etc.;

3° Les poids de parties des tiges comprises entre les horizontales tangentes, l'une à la courbe des chaînes, l'autre à la courbe inférieure du tablier;

4° Les poids des poutrelles fixées aux tiges de suspension avec toutes leurs armatures, ferrures et tasseaux;

Digitized by Google

5° Enfin, ceux des boulons, contre-fiches, etc., qui servent à fixer les gardes-corps aux poutrelles.

Le *deuxième groupe* se compose :

1° Des poids qui résultent de la partie uniforme du plancher, les poutrelles non comprises ;

2° Des poids de la partie uniforme des gardes-corps.

Le *troisième groupe* est formé du poids des tiges comprises en dehors des horizontales tangentes, l'une à la courbe des chaînes, l'autre à la courbe inférieure du tablier du pont.

Représentons encore par :

V_n l'ordonnée d'un sommet quelconque n du polygone ;

n le numéro du sommet en question ;

H_n l'abscisse du sommet n ;

S_n la longueur de la chaîne correspondante au sommet n ;

X l'abscisse } de la courbe totale dont la longueur est S_n ;
Y l'ordonnée }

N le numéro du dernier sommet du polygone ;

Q la tension horizontale constante ;

t_n la tension du côté compris entre les sommets n et $n+1$;

α_n l'angle de ce côté avec l'horizontale ;

Π_n le poids total placé sur tous les sommets depuis le premier jusqu'au n^e inclusivement ;

l la longueur d'un côté du polygone ;

Et appelons :

γ le poids par unité de longueur des chaînes de l'ensemble des poids du premier groupe ;

π l'ensemble des poids du second groupe sur l'unité de longueur de l'horizontale ;

Digitized by Google

Ω le poids total des tiges en dehors des tangentes horizontales ;

[265] Nous aurons, formule (214),

$$\Pi_n = Aln \pm Bl^3n^3; \qquad (n)$$

dans cette expression on a :

$$A = (\gamma + \pi) \qquad B = \frac{b}{l^3N^3} = \left(\frac{\Omega - \pi(S_n - X)}{N^3l^3}\right).$$

Le coefficient B est généralement assez faible; on lui conserve, dans l'équation (n), le signe que le calcul numérique lui assigne.

[266] *L'ordonnée d'un sommet* quelconque du polygone est donnée par la formule (224) :

$$V_n = \frac{1}{Q}\left\{\frac{A}{2}S^2_n + \left(\pm\frac{b}{4S_n^3} - \frac{A^3}{8Q^2}\right)S^4_n + \left(\frac{A^5}{16Q^4} \mp \frac{A^3b}{4S^3_nQ}\right)S^6_n\right\}, \qquad (o)$$

dans laquelle on a encore :

$$A = (\gamma + \pi) \qquad b = \Omega - \pi(S_n - X) \qquad \text{et}$$

[267] *La longueur de la chaîne* correspondante au sommet n, est

$$S_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)l. \qquad (p)$$

[268] *Les abscisses* s'obtiennent au moyen de la formule (230) ;

$$H_n = S_n - \frac{1}{Q^2}\left\{\frac{A^2}{6}S^3_n - \left(\frac{3A^4}{40Q^2} \mp \frac{Ab}{5S^3_n}\right)S^5_n + \left(\frac{5A^6}{112Q^4} \mp \frac{3A^3b}{14Q^2S^3_n} + \frac{b^2}{14S^6_n}\right)S^7_n\right\}. \qquad (q)$$

[269] *La composante horizontale* Q peut se déduire de l'équation (224) ou (o), dans laquelle on met pour V_n et S_n leurs valeurs limites V_n et S_n ; cette équation est alors, en ordonnant par rapport à S_n,

Digitized by Google

$$V_n = \frac{1}{Q}\left\{\pm\frac{b}{4}S_n + \frac{A}{2}S^2_n \mp \frac{A^2 b}{4Q^2}S^3_n - \frac{A^3}{8Q^2}S^4_n + \frac{A^5}{16Q^4}S^6_n\right\}. \qquad (r)$$

Cette équation peut se résoudre, relativement à Q, par la méthode des approximations successives; mais, en général, il suffit de prendre la composante horizontale de la chaînette qu'on introduit dans la parenthèse du deuxième membre à la place de Q; on obtient alors une équation de la forme :

$$V_n = \frac{1}{Q}M,$$

de laquelle on déduit la valeur définitive de Q.

[270] *Tension d'un élément quelconque du polygone.* Quand on connaît Q, on peut calculer facilement la tension d'un élément quelconque de la chaîne, compris entre les sommets n et $n+1$, au moyen de la formule (233) :

$$t_n = \sqrt{Q^2 + \Pi^2_n}. \qquad (s)$$

[271] *La tangente de l'angle* α_n est, d'après la formule (234),

$$\text{tang. } \alpha_n = \frac{\Pi_n}{Q}. \qquad (t)$$

On peut graphiquement déterminer les divers éléments du polygone par des considérations analogues à celles que nous avons développées pararagraphes [153], [156], [167] et [168].

[272] *Applications.* Pour appliquer les formules précédentes nous prendrons un polygone dont les côtés sont à peu près égaux à ceux du polygone de la chaînette,

$$l = 1^m 236;$$

et dont le poids total apporté par les chaînes est, comme dans les cas précédents,

$$\Pi_n = 211767^{kil},594.$$

Digitized by Google

Décomposons d'abord ce poids en ses trois groupes :

Troisième groupe. D'après la note 2, nous savons que l'expression de la somme des longueurs des tiges dans le cas des polygones à chaînons égaux est la même que dans le cas des tiges équidistantes sur l'horizontale; ces tiges supportant d'ailleurs à peu près les mêmes charges dans les deux cas, supposons-leur donc le même poids par mètre courant; nous aurons toujours

$$\Omega = 2315^{\text{kil.}},135.$$

Premier groupe.

1° Prenons encore pour poids total des chaînes.	$\Gamma_n = 53325^{\text{kil.}},000$
2° Pour poids de la partie des tiges entre les tangentes horizontales, $D \times N \times 5^{\text{kil.}} = 1,50 \times 81 \times 5^{\text{kil.}}$. . . .	$= 607\ ,500$
3° Pour un pont de $4^{\text{m}},20$ de large, poutrelles $0^{\text{m}},30 \times 0,16 \times 6^{\text{m}}. \times 81 =$.	$23328\ ,000$
4° Pour les autres poids de ce groupe, c'est-à-dire pour les attaches des tiges avec les chaînes et les poutrelles et autres ferrures, etc., 10 kil. par paire de tiges. $10^{\text{kil.}} \times 81$.	$810\ ,000$
Poids total du premier groupe.	$78070^{\text{kil.}},500$

Alors on a :

$$\gamma = \frac{78070^{\text{kil.}},500}{Nl} = 779^{\text{kil.}},858.$$

Deuxième groupe. Le poids total du deuxième groupe s'obtiendra en retranchant du poids total de l'appareil la somme des poids du premier et du troisième groupe. $\Omega + \gamma Nl = 80385^{\text{kil.}},635$; nous aurons donc pour ce deuxième groupe :

$$211767^{\text{kil.}},594 - 80385^{\text{kil.}},635 = 131381^{\text{kil.}},959$$

Digitized by Google

Maintenant pour avoir le poids π par mètre courant de l'horizontale du deuxième groupe, il faudrait diviser 131381,959 par la longueur sur l'horizontale du tablier supporté par les chaînes. Cette longueur est H_n + la demi-distance de la dernière tige à la culée; cette demi-distance est plus faible que la demi-distance constante des tiges dans le cas des tiges équidistantes, c'est-à-dire plus faible que $\frac{1,215}{2}$; supposons-la égale à $0^m,59$; nous aurons :

$$\pi = \frac{131381^{kil.},959}{97,80 + 0,59} = 1335^{kil.},3182.$$

Dans les cas ordinaires de la pratique, on calcule directement les poids des trois groupes dont nous venons de parler, sans passer par les considérations précédentes, qui nous sont ici nécessaires pour comparer les résultats que nous allons obtenir avec ceux que nous avons eus dans les cas précédents.

Les données du problème seront donc :

$V_n = 15^m,84$ ordonnée du dernier sommet N;

$X = H_n = 97^m,80$ abscisse du dernier sommet N;

$N = 81$ numéro du dernier sommet ou nombre total des tiges;

$D = 1^m,50$ distance entre les tangentes horizontales;

$f_n = 1^m,10$ flèche du tablier correspondante au sommet N;

$\frac{V_n}{H_n} = 0,162$;

$\Pi_n = 211767^{kil.},594$ poids total du système à supporter;

$\Omega = 2315^{kil.},135$ poids des tiges en dehors des tangentes horizontales (troisième groupe);

$\gamma = 779^{kil.},858$ poids par mètre courant des chaînes, de l'ensemble des poids du premier groupe;

$\pi = 1335^{kil.},3182$ poids par mètre courant, sur l'horizontale, de l'ensemble des poids du deuxième groupe;

$l = 1^m,236$ longueur constante des côtés du polygone.

Digitized by Google

[273] Pour calculer les ordonnées et les abscisses du polygone, il faut connaître les coefficients A et b; nous avons d'abord :

$$b = \Omega - \pi(S_n - X);$$

or formule (p),

$$S_n = \left(N - \frac{1}{2}\right) l = 80,5 \times 1^m,236 = 99^m,498,$$

par conséquent,

$$b = 2315 - 2267^{kil.},37 = 47,765$$

et

$$Bl^3 = \frac{b}{N^3} = \frac{47,765}{531441} = 0,0000898764$$

$$Al = 2115,1762 \times 1,236 = 2614,357783.$$

[274] La formule (r) nous fournit les moyens de calculer la valeur de la composante horizontale. Pour cela, mettons dans la parenthèse la valeur de la composante horizontale de la chaînette 644382,3, ou plus simplement 644400 à la place de Q; faisons de plus $V_n = 15,84$; $S_n = 99,498$; $A = 2115,1762$; $b = 47,765$; nous aurons, en observant que b est positif, et que par conséquent il faut prendre le signe supérieur quand un terme est précédé du double signe $\pm$ ou $\mp$:

$$15,84 = \frac{1}{Q}\,[1'188,1305 + 10'469'964,8 - 126,73 - 279'167,77 + 14'889,407]$$

$$= \frac{1}{Q} \times 10'206'727,8375;$$

d'où

$$Q = \frac{10'206'727,8375}{15,84} = 644'364^{kil.}.$$

Cette valeur de Q est suffisamment exacte pour les cas ordinaires de la pra-

Digitized by Google

tique. Si nous voulions avoir une valeur de Q plus exacte encore, nous substituerions cette première valeur dans la parenthèse de l'équation (*r*) et nous obtiendrions une nouvelle équation de la forme $V_n = \frac{1}{Q} M$, d'où nous tirerions la valeur de Q. Ce deuxième calcul exige peu de temps, car les logarithmes des différentes quantités entre parenthèse sont déjà tout trouvés par la première opération. En effectuant cette deuxième opération, nous trouverions :

$$Q = 644'362^{\text{kil.}}.$$

Cette composante horizontale étant plus faible que celle de la chaînette, la courbe des chaînes est plus creusée que la chaînette près des culées.

[275] Connaissant Q, nous pouvons trouver les ordonnées du polygone au moyen de l'équation (*o*); dans cette équation faisons $Q = 644362$; $n = 30$; $A = 2115,1762$; $b = 47,765$; $S_n = 99,498$; $S_n = 29,5 \times 1,236 = 36,462$; nous aurons pour l'ordonnée du trentième sommet :

$$V_{30} = 2,1820645 - 0,00778163 + 0,0000555 = 2^m,17434.$$

Cette ordonnée surpasse un peu l'ordonnée correspondante du polygone de la chaînette; la différence est :

$$2^m,17434 - 2^m,17410 = 0^m,00024.$$

Pour avoir toutes les ordonnées du polygone, on résoudrait l'équation (*o*) par le calcul graphique dont nous avons parlé à l'occasion des ordonnées du polygone réel d'équilibre dans le cas des tiges équidistantes. On substitue d'abord à la place de S_n, dans la formule (*o*), sa valeur $\left(n - \frac{1}{2}\right) l$; alors on a une équation de la forme

$$V_n = R\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + M\left(n - \frac{1}{2}\right)^4 + T\left(n - \frac{1}{2}\right)^6$$

dans laquelle les valeurs de $\left(n - \frac{1}{2}\right)$ aux diverses puissances sont données tableau n° 2, et qu'on résout facilement par le calcul graphique en question.

Digitized by Google

[276] L'abscisse du trentième sommet est donnée par la formule (q), dans laquelle on substitue à la place de S_n, S_n, Q, A et b les valeurs précédentes; on obtient alors :

$$H_{30} = 36^m,375496.$$

Pour calculer toutes les abscisses du polygone, on emploie le procédé graphique que nous avons indiqué au sujet des ordonnées.

[277] La tension du dernier élément du polygone doit être plus faible que pour la chaînette; car sa composante horizontale est plus faible que celle de la chaînette.

La formule (s) donne en effet :

$$t_n = 677'678^{kil.},6.$$

[278] La tangente de l'angle de ce dernier élément avec l'horizontale est, formule (t) :

$$\text{tang. } \alpha_n = \frac{211'767^{kil.},594}{644362} = 0,3286468.$$

L'angle correspondant est :

$$\alpha_n = 18°11'34'',6.$$

Cet angle est un peu plus grand que l'angle formé par le dernier élément de la chaînette avec l'horizontale.

Digitized by Google

3e DIVISION.

Dtermination pratique des polygones en équilibre sous l'action de poids quelconques distribués d'une manière arbitraire sur leurs sommets.

1er CAS : Les projections horizontales des côtés du polygone étant égales entre elles.

[279] Nous avons précédemment déterminé, section 6, les formules qui conviennent aux cas que nous nous proposons de traiter. Quand les poids suivent une certaine loi mathématique, ces formules se simplifient beaucoup et leur application est très-facile; mais quand la loi de répartition des poids ne peut être formulée, il faut alors résoudre les formules de la section 6 en calculant séparément chacun des termes et les additionnant ensuite.

Nous indiquons ci-dessous la marche qui nous paraît la plus sûre et la plus simple pour résoudre arithmétiquement les formules relatives aux problèmes que nous venons d'énoncer.

La formule (9), qui donne l'expression de l'ordonnée d'un polygone en équilibre sous l'action de poids donnés p_1, p_2, p_3, etc., quand h est constant, est :

$$V_n = \frac{h}{Q}(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots + P_{n-1}). \qquad (a)$$

Ici rien ne limite les valeurs du poids P_n que les relations établies § [41], formule (6), entre les poids partiels p_1, p_2, p_3, etc., placés aux sommets du polygone. Ces relations sont :

$$\begin{aligned}
P_1 &= p_1 \\
P_2 &= p_1 + p_2 \\
P_3 &= p_1 + p_2 + p_3 \\
&\vdots \\
P_n &= p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_n.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Si donc nous portons dans la première colonne du tableau ci-dessous les poids p_1, p_2, p_3, etc., les uns au-dessous des autres, il nous sera facile, par l'addition successive de différents poids partiels, de composer les poids P_1, P_2, P_3, etc., de la deuxième colonne de ce même tableau.

POIDS PARTIELS placés aux sommets du polygone ou valeurs de p_n	SOMMES des poids partiels ou valeurs de $P_n = \Sigma^n p_n$	VALEURS de $\Sigma^{n-1} P_n = \Sigma^{n-1} \Sigma^{n-1} p_n$	VALEURS DES ORDONNÉES des sommets du polygone. $\frac{h}{Q} \Sigma^{n-1} P_n = V_n$
p_1	P_1	P_1	V_1
p_2	P_2	$P_1 + P_2$	V_2
p_3	P_3	$P_1 + P_2 + P_3$	V_3
p_4	P_4	$P_1 + P_2 + P_3 + P_4$	V_4
⋮	⋮	⋮	⋮
p_{n-1}	P_{n-1}	$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{n-1}$	V_{n-1}

Ainsi chaque valeur de P_n sera représentée par

$$P_n = \Sigma^n p_n, \qquad (b)$$

en représentant par $\Sigma^n p_n$ la somme des poids placés sur le polygone depuis le sommet le plus bas jusqu'au sommet n inclusivement. Mais, dans le second membre de l'équation (a), le facteur entre parenthèse est la somme des poids P_n, de sorte que l'on a :

$$(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{n-1}) = \Sigma^{n-1} P_n = \Sigma^{n-1} \Sigma^{n-1} p_n, \qquad (c)$$

c'est-à-dire que ce facteur est égal à la somme de la somme des poids placés depuis le sommet le plus bas du polygone, jusqu'au sommet n exclusivement.

Ces sommes (c) qui résultent des additions successives des chiffres pla-

Digitized by Google

cés dans la deuxième colonne, forment la troisième colonne du tableau en question.

Pour obtenir les ordonnées des sommets du polygone, il suffira de multiplier successivement tous ces nombres par le rapport $\frac{h}{Q}$ de la projection horizontale constante h des côtés du polygone à la composante horizontale Q des tensions.

[280] La valeur de la composante horizontale Q est donnée par l'équation

$$Q = \frac{h}{V_n} \Sigma^{n-1} P_n, \qquad (d)$$

dans laquelle h est la projection horizontale constante des côtés du polygone,

V_n la valeur de la flèche que l'on veut donner au polygone,

$\Sigma^{n-1} P_n$ la somme déduite de la troisième colonne du tableau précédent.

Au moyen de ces valeurs de Q et de h, on établira, avec les nombres de la troisième colonne, la valeur des ordonnées qui sont portées dans la quatrième colonne du tableau et qui sont :

$$V_n = \frac{h}{Q} \Sigma^{n-1} P_n = \frac{h}{Q} \Sigma^{n-1} \Sigma^{n-1} p_m. \qquad (e)$$

[281] Dans les calculs précédents, nous n'avons pas tenu compte de la répartition du poids des chaînes et des tiges de suspension. Si ces nouvelles forces ne pouvaient plus être négligés, comme devant apporter des modifications trop importantes dans la forme du polygone, il faudrait, après avoir déterminé approximativement par les procédés graphiques que nous avons exposés plus haut, les longueurs des côtés du polygone ainsi que les ordonnées des sommets de ce même polygone, introduire les poids de ces tiges et des différentes parties de cette chaîne dans les poids p_1, p_2, p_3, etc. de la première colonne du tableau, et pour le reste du calcul, opérer comme nous l'avons fait plus haut.

Si les calculs devaient présenter trop de longueur relativement à l'impor-

Digitized by Google

tance de la construction, on emploierait les procédés graphiques décrits § [116] et indiqués *fig* 23, en ayant soin de porter sur la perpendiculaire BC les valeurs réelles de P_1, P_2, P_3, etc., consignées dans la deuxième colonne du tableau.

[282] *Longueur de la chaîne.* Si l'on ne voulait pas employer les procédés graphiques dont nous venons de parler pour déterminer la longueur de la chaîne, il faudrait alors résoudre la formule (22) en se servant des valeurs de P_n portées dans la deuxième colonne du tableau précédent. Alors on aurait à calculer, autant de fois qu'il y a de côtés moins un, l'expression $\sqrt{1+\frac{P^2_n}{Q^2}}$. La somme de ces expressions augmentée de la moitié de l'élément horizontal donnera la longueur de la chaîne.

[283] *Tension d'un côté du polygone.* Elle se déterminera par l'expression (24) qui est

$$t_n = \sqrt{Q^2 + P^2}. \qquad (f)$$

[284] *La tangente de l'angle* que fait le côté compris entre le $n^{ème}$ et le $(n+1)^{ème}$ sommet avec l'horizontale est donnée par la relation (26) rapportée ci-dessous :

$$\text{tang. } \alpha_n = \frac{P_n}{Q}. \qquad (g)$$

2e CAS : Les chaînons étant égaux.

[285] Pour ce cas, la résolution des formules (13), (14) ou (15), au moyen des tableaux analogues aux tableaux précédents, ne pourrait plus s'effectuer simplement à cause de la longueur des calculs dans lesquels elle entraînerait. C'est la raison pour laquelle nous ne les donnons pas ici.

Pour ce cas particulier, nous conseillons l'emploi des procédés graphiques décrits section n° 7.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLEAUX.

Digitized by Google

TABLEAU N° 1,

Relatif aux ponts suspendus à câbles paraboliques, indiquant, au moyen de coefficients calculés :

1° *La tangente* de l'angle formé par le dernier élément du câble avec l'horizontale, en fonction du rapport de la flèche à la demi-corde ;
2° *La longueur du câble* parabolique en fonction de la demi-corde ;
3° *La tension* du dernier élément du câble (près des culées) en fonction du poids total du pont et de sa surcharge ;
4° *La composante horizontale* des tensions en fonction de la charge totale du pont ;
5° La flèche d'un arc de chaînette d'une longueur égale à celle de l'arc parabolique.

N°s	$\frac{V_n}{H_n}$	tang. α_n	H_n	L'	P_n	t'	Q'	$\Delta = \frac{1}{15}\frac{f^2}{h^2} - 0,143\frac{f^4}{h^4}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,200	0,400	1	1,026667	1	2,6925	2,5000	0,00243787
2	0,198	0,396	1	1,026136	1	2,7161	2,5252	0,00239382
3	0,196	0,392	1	1,025611	1	2,7400	2,5512	0,00235002
4	0,194	0,388	1	1,025091	1	2,7645	2,5773	0,00230652
5	0,192	0,384	1	1,024576	1	2,7895	2,6041	0,00226327
6	0,190	0,380	1	1,024067	1	2,8150	2,6316	0,00222171
7	0,188	0,376	1	1,023563	1	2,8348	2,6596	0,00217764
8	0,186	0.372	1	1,023064	1	2,8648	2,6881	0,00213520
9	0,184	0,368	1	1,022571	1	2,8922	2,7174	0,00209312
10	0,182	0,364	1	1,022083	1	2,9234	2,7421	0,00205136
11	0,180	0,360	1	1,021600	1	2,9522	2,7777	0,00200988
12	0,178	0,356	1	1,021123	1	2,9816	2,8090	0,00196872
13	0,176	0,352	1	1,020651	1	3,0118	2,8409	0,00192786
14	0,174	0,348	1	1,020184	1	3,0426	2,8736	0,00188732
15	0,172	0,344	1	1,019723	1	3,0741	2,9069	0,00184711
16	0,170	0,340	1	1,019267	1	3,1064	2,9411	0,00180723
17	0,168	0,336	1	1,018816	1	3,1397	2,9762	0,00176769
18	0,166	0,332	1	1,018371	1	3,1737	3,0121	0,00172849
19	0,164	0,328	1	1,017931	1	3,2080	3,0487	0,00168962
20	0,162	0,324	1	1,017496	1	3,2444	0,0864	0,00165110
21	0,160	0,320	1	1,017067	1	3,2811	3,1250	0,00161295
22	0,158	0,316	1	1,016643	1	3,3184	3,1645	0,00157515
23	0,156	0,312	1	1,016224	1	3,3574	3,2051	0,00153771

Digitized by Google

N°s	$\frac{V_n}{H_n}$	tang. α_n	H_n	L'	P_n	t'	Q'	$\Delta = \frac{1}{15}\frac{f^2}{h^2} - 0,143\frac{f^4}{h^4}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
24	0,154	0,308	1	1,015811	1	3,3973	3,2467	0,00150064
25	0,152	0,304	1	1,015403	1	3,4381	3,2895	0,00146394
26	0,150	0,300	1	1,015000	1	3,4801	3,3333	0,00142761
27	0,148	0,296	1	1,014603	1	3,5232	3,3784	0,00139169
28	0,146	0,292	1	1,014211	1	3,5677	3,4247	0,00135609
29	0,144	0,288	1	1,013824	1	3,6216	3,4722	0,00132091
30	0,142	0,284	1	1,013443	1	3,6593	3,5211	0,00127613
31	0,140	0,280	1	1,013067	1	3,7088	3,5714	0,00125174
32	0,138	0,276	1	1,012696	1	3,7588	3,6232	0,00121774
33	0,136	0,272	1	1,012331	1	3,8102	3,6764	0,00118415
34	0,134	0,268	1	1,011971	1	3,8442	3,7313	0,00115099
35	0,132	0,264	1	1,011616	1	3,9177	3,7879	0,00111818
36	0,130	0,260	1	1,011267	1	3,9740	3,8461	0,00108581
37	0,128	0,256	1	1,010923	1	4,0321	3,9062	0,00102901
38	0,126	0,252	1	1,010584	1	4,0923	3,9682	0,00102236
39	0,124	0,248	1	1,010251	1	4,1545	4,0322	0,00099129
40	0,122	0,244	1	1,009923	1	4,2185	4,0983	0,00096059
41	0,120	0,240	1	1,009600	1	4,2850	4,1667	0,00093035
42	0,118	0,236	1	1,009283	1	4,3537	4,2373	0,00090058
43	0,116	0,232	1	1,008971	1	4,4248	4,3103	0,00087121
44	0,114	0,228	1	1,008664	1	4,4986	4,3856	0,00084225
45	0,112	0,224	1	1,008363	1	4,5749	4,4643	0,00081377
46	0,110	0,220	1	1,008067	1	4,6542	4,5454	0,00078573
47	0,108	0,216	1	1,007760	1	4,7365	4,6296	0,00075815
48	0,106	0,212	1	1,007491	1	4,8217	4,7167	0,00073104
49	0,104	0,208	1	1,007211	1	4,9107	4,8077	0,00070434
50	0,102	0,204	1	1,006936	1	5,0029	4,9019	0,00067812
51	0,100	0,200	1	1,006667	1	5,0990	5,0000	0,00065237

1° *La longueur totale de la chaîne parabolique* a pour expression, formule (59) :

$$L_n = H_n \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{V_n}{H_n}\right)^2\right]. \qquad (a)$$

Le tableau contient toutes les valeurs de $\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{V_n}{H_n}\right)^2\right]$ qui correspon-

Digitized by Google

dent aux valeurs du rapport $\frac{V_N}{H_N}$ se trouvant dans la deuxième colonne. En sorte que pour avoir la longueur de la chaîne parabolique quand on connaît le rapport $\frac{V_N}{H_N}$, on multiplie le nombre de la colonne 5 qui se trouve sur la même ligne horizontale que ce rapport par la valeur de H_N.

V_N, flèche des câbles correspondant au dernier sommet N.

H_N, abscisse de ce dernier sommet N.

2° N étant le numéro du dernier sommet du polygone ;

V_N l'ordonnée } de ce dernier sommet ;
H_N l'abscisse }

h la distance constante entre deux tiges consécutives ;

π le poids du pont et de sa surcharge par mètre courant de l'horizontale,

La composante horizontale Q a pour expression, formule (42) :

$$Q = \frac{\pi h^2}{2V_N}(N^2 - N) = \pi h N \frac{h(N-1)}{2V_N} = P_N \frac{h(N-1)}{2V_N}. \qquad (b)$$

La colonne 8 du tableau contient les différentes valeurs de $\frac{1}{2}\frac{H_N}{V_N}$ sensiblement égal à $\frac{h(N-1)}{2V_N^2}$ et qui correspondent aux valeurs du rapport $\frac{V_N}{H_N}$ contenues dans la deuxième colonne. Pour avoir Q, quand on connaît $\frac{V_N}{H_N}$, il suffit donc, d'après la formule (*b*), de multiplier le nombre de la colonne 8 du tableau n° 1 qui correspond au rapport $\frac{V_N}{H_N}$, par la valeur $P_N = \pi h N$ du poids connu du pont et de sa surcharge.

3° *La tension du dernier élément du câble parabolique* est, formule (65) :

$$t_N = P_N \sqrt{\left(\frac{Nh - h}{2V_N}\right)^2 + 1} = P_N t'. \qquad (c)$$

Digitized by Google

Les différentes valeurs de t', colonne 7 du tableau, ont été obtenues en calculant les valeurs de $\sqrt{\left(\frac{H_n}{2\,V_n}\right)^2 + 1}$ correspondantes aux valeurs de $\frac{V_n}{H_n}$, contenues dans la colonne 2 du tableau. Ces valeurs de t' sont sensiblement les mêmes que celles du radical de l'expression (*c*). Alors pour obtenir la tension du dernier élément du câble dont le rapport $\frac{V_n}{H_n}$, de la flèche à la demi-corde, est connu, on multiplie le nombre de la colonne 7 correspondant à ce rapport par le poids connu P_n du pont et de sa surcharge.

4° *La tangente* de l'angle que fait le dernier élément du câble parabolique avec l'horizontale est égale au double du rapport de la flèche à la demi-corde, en sorte que pour avoir les nombres de la colonne 3 on a doublé ceux de la colonne 2.

5° *La chaînette* de même longueur d'arc et même ouverture que la parabole, a une flèche plus faible que cette dernière :

V_n et H_n étant toujours la flèche et la demi-corde de la parabole, si nous appelons

Y la flèche de la chaînette de même longueur d'arc et même ouverture H_n que la parabole, et

Δ la fraction de V_n qui exprime de combien la flèche de la parabole surpasse celle de la chaînette, nous aurons, formule (170) :

$$Y = V_n - \Delta V_n. \qquad (d)$$

Dans cette formule on a (177) :

$$\Delta = \frac{1}{15}\frac{V^2_n}{H^2_n} - 0{,}143\,\frac{V^4_n}{H^4_n}. \qquad (e)$$

La colonne 9 du tableau contient toutes les valeurs de Δ qui correspondent aux différentes valeurs de $\frac{V_n}{H_n}$ contenues dans la deuxième colonne.

Digitized by Google

Pour avoir la flèche de la chaînette de même ouverture et même longueur d'arc que la parabole dont on connaît le rapport $\frac{V_n}{H_n}$ de la flèche à la demi-corde, on multiplie le nombre de la colonne 9 qui se trouve sur la même ligne horizontale que ce rappport $\frac{V_n}{H_n}$ par la flèche V_n de la parabole et on retranche ce produit de la flèche V_n.

Le tableau dont nous venons de parler est d'une application très-commode et suffisamment exacte pour les avant-projets.

Si, dans les applications, on avait un rapport $\frac{V_n}{H_n}$ qui ne se trouvat pas dans le tableau, on déduirait les valeurs de L', t', Q' et Δ qui doivent correspondre à ce rapport, au moyen d'une proportion.

Digitized by Google

TABLEAU N° 2.

De quelques puissances des nombres compris entre 0 *et* 100.

N	N^2	$N^2 - N$	$\left(N - \frac{1}{2}\right)^2$	N^3	N^4	N^5	N^6
1	1	0	0,125	1	1	1	1
2	4	2	3,375	8	16	32	64
3	9	6	15,625	27	81	243	729
4	16	12	42,875	64	256	1'024	4'096
5	25	20	91,125	125	625	3'125	15'625
6	36	30	166,375	216	1'296	7'776	46'656
7	49	42	274,625	343	2'401	16'807	117'649
8	64	56	421,875	512	4'096	32'768	262'144
9	81	72	614,125	729	6'561	59'049	531'441
10	100	90	857,375	1'000	10'000	100'000	1'000'000
11	121	110	1'157,625	1'331	14'641	161'051	1'771'561
12	144	132	1'520,875	1'728	20'736	248'832	2'985'984
13	169	156	1'953,125	2'197	28'561	371'293	4'826'809
14	196	182	2'460,375	2'744	38'416	537'824	7'529'536
15	225	210	3'048,625	3'375	50'625	759'375	11'390'625
16	256	240	3'723,875	4'096	65'536	1'048'576	16'777'216
17	289	272	4'492,125	4'913	83'521	1'419'857	24'137'569
18	324	306	5'359,375	5'832	104'976	1'889'568	34'012'224
19	361	342	6'331,625	6'859	130'321	2'476'099	47'045'881
20	400	380	7'414,875	8'000	160'000	3'200'000	64'000'000
21	441	420	8'615,125	9'261	194'481	4'084'101	85'766'121
22	484	462	9'938,375	10'648	234'256	5'153'632	113'379'904
23	529	506	11'390,625	12 167	279'841	6'436'343	148'035'889
24	576	552	12'997,875	13'824	331'776	7'962'624	191'102'976
25	625	600	14'706,125	15'625	390'625	9'765'625	244'140'625
26	676	650	16'581,375	17'576	456'976	11'881'376	308'915'776
27	729	702	18'609,625	19'683	531'441	14'348'907	387'420'489
28	784	756	20'796,875	21'952	614'656	17'210'368	481'890'304
29	841	812	23'149,125	24'389	707'281	20'511'149	594'823'321
30	900	870	25'672,375	27'000	810'000	24'300'000	729'000'000
31	961	930	28'372,625	29'791	923'521	28'629'151	887'503'681
32	1'024	992	31'255,875	32'768	1'048'576	33'554'432	1'073'741'824

Digitized by Google

N	N^2	$N^2 - N$	$\left(N - \frac{1}{2}\right)^3$	N^3	N^4	N^5	N^6
33	1'089	1'056	37'328,125	35'937	1'185'921	39'135'393	1'291'467'969
34	1'156	1'122	37'595,375	39'304	1'336'336	45'435'424	1'544'804'416
35	1'225	1'190	41'063,625	42'875	1'500'625	52'521'875	1'838'265'625
36	1'296	1'260	44'738,875	46'656	1'679'616	60'466'176	2'176'782'336
37	1'369	1'332	48'627,125	50'653	1'874'161	69'343'957	2'565'726'409
38	1'444	1'406	52'734,375	54'872	2'085'136	79'235'168	3'010'936'384
39	1'521	1'482	57'066,625	59'319	2'313'441	90'224'199	3'518'743'761
40	1'600	1'560	61'629,875	64'000	2'560'000	102'400'000	4'096'000'000
41	1'681	1'640	66'430,125	68'921	2'825'761	115'856'201	4'750'104'241
42	1'764	1'722	71'473,375	74'088	3'111'696	130'691'232	5'489'031'744
43	1'849	1'806	76'765,625	79'507	3'418'801	147'008'443	6'321'363'049
44	1'936	1'892	82'312,875	85'184	3'748'096	164'916'224	7'256'313'856
45	2'025	1'980	88'121,125	91'125	4'100'625	184'528'125	8'303'765'625
46	2'116	2'070	94'196,375	97'336	4'477'456	205'962'976	9'474'296'896
47	2'209	2'162	100'544,625	103'823	4'879'681	229'345'007	10'779'215'329
48	2'304	2'256	107'171,875	110'592	5'308'416	254'803'968	12'230'590'464
49	2'401	2'352	114'084,125	117'649	5'764'801	282'475'249	13'841'287'201
50	2'500	2'450	121'287,375	125'000	6'250'000	312'500'000	15'625'000'000
51	2'601	2'550	128'787,625	132'651	6'765'201	345'025'251	17'596'287'801
52	2'704	2'652	136'590,875	140'608	7'311'616	380'204'032	19'770'609'664
53	2'809	2'756	144'703,125	148'877	7'890'481	418'195'493	22'164'361'129
54	2'916	2'862	153'130,375	157'464	8'503'056	459'165'024	24'794'911'296
55	3'025	2'970	161'878,625	166'375	9'150'625	503'284'375	27'680'640'625
56	3'136	3'080	170'953,875	175'616	9'834'496	550'731'776	30'840'979'456
57	3'249	3'192	180'362,125	185'193	10'556'001	601'692'057	34'296'447'249
58	3'364	3'306	190'109,375	195'112	11'316'496	656'356'768	38'068'692'544
59	3'481	3'422	200'201,625	205'379	12'117'361	714'924'299	42'180'533'641
60	3'600	3'540	210'644,875	216'000	12'960'000	777'600'000	46'656'000'000
61	3'721	3'660	221'445,125	226'981	13'845'841	844'596'301	51'520'374'361
62	3'844	3'782	232'608,375	238'328	14'776'336	916'132'832	56'800'235'584
63	3'969	3'906	244'140,625	250'047	15'752'961	992'436'543	62'523'502'209
64	4'096	4'032	256'047,875	262'144	16'777'216	1'073'741'824	68'719'476'736
65	4'225	4'160	268'336,125	274'625	17'850'625	1'160'290'625	75'418'890'625
66	4'356	4'290	281'011,375	287'496	18'974'736	1'252'332'576	82'653'950'016
67	4'489	4'422	294'079,625	300'763	20'151'121	1'350'125'107	90'458'382'169
68	4'624	4'556	307'546,875	314'432	21'384'376	1'453'933'568	98'867'482'624
69	4'761	4'692	321'449,125	328'509	22'667'621	1'564'031'349	107'918'463'081
70	4'900	4'830	335'702,375	343'000	24'010'000	1'680'700'000	117'649'000'000

Digitized by Google

N	N^2	N^2-N	$\left(N-\frac{1}{2}\right)^3$	N^3	N^4	N^5	N^6
71	5'041	4'970	350'402,625	357'911	25'411'681	1'804'229'351	128'100'283'921
72	5'184	5'112	365'525,875	373'248	26'873'856	1'944'917'632	139'314'069'504
73	5'329	5'256	381'078,125	389'017	28'398'241	2'073'071'593	151'334'226'289
74	5'476	5'402	397'065,375	405'224	29'986'576	2'219'006'624	164'206'490'176
75	5'625	5'550	414'493,625	421'875	31'640'625	2'373'046'875	177'978'515'625
76	5'776	5'700	430'368,875	438'976	33'362'176	2'535'525'376	192'699'928'576
77	5'929	5'852	447'697,125	456'533	35'153'041	2'706'784'157	208'422'380'069
78	6'084	6'006	465'484,375	474'552	37'015'056	2'887'174'368	225'199'600'704
79	6'241	6'162	483'736,625	493'039	38'950'081	3'077'056'399	243'087'455'521
80	6'400	6'320	502'459,875	512'000	40'960'000	3'276'800'000	262'144'000'000
81	6'561	6'480	521'660,125	531'441	43'046'721	3'486'784'401	282'429'536'481
82	6'724	6'642	541'343,375	551'368	45'212'176	3'707'398'432	304'006'671'424
83	6'889	6'806	561'515,625	571'787	47'458'321	3'939'040'643	326'940'373'369
84	7'056	6'972	582'182,875	592'704	49'787'136	4'182'119'424	351'298'031'616
85	7'225	7'140	603'351,125	614'125	52'200'625	4'437'053'125	377'149'515'625
86	7'396	7'310	625'026,375	636'056	54'700'816	4'704'270'176	404'567'235'136
87	7'569	7'482	647'214,625	658'503	57'289'761	4'984'209'207	433'626'201'009
88	7'744	7'656	669'921,875	681'472	59'969'536	5'277'319'168	464'404'086'784
89	7'921	7'832	693'154,125	704'969	62'742'241	5'584'059'449	496'981'290'961
90	8'100	8'010	716'917,375	729'000	65'610'000	5'904'900'000	531'441'000'000
91	8'281	8'190	741'917,629	753'571	68'574'961	6'240'321'451	567'869'252'041
92	8'464	8'372	766'060,875	778'688	71'639'296	6'590'815'232	606'355'001'344
93	8'649	8'556	791'453,125	804'357	74'805'201	6'956'883'693	646'990'183'449
94	8'836	8'742	817'400,375	830'584	78'074'896	7'339'040'224	689'869'781'056
95	9'025	8'930	843'908,625	857'375	81'450'625	7'737'809'375	735'091'890'625
96	9'216	9'120	870'983,875	884'736	84'934'656	8'153'726'976	782'757'789'696
97	9'409	9'312	998'632,125	912'673	88'529'281	8'587'340'257	832'972'004'929
98	9'604	9'506	926'859,375	941'192	92'236'816	9'039'207'968	885'842'380'864
99	9'801	9'702	955'671,625	970'299	96'059'601	9'509'900'499	941'480'149'401
100	10'000	9'900	985'074,875	1'000'000	100'000'000	10'000'000'000	1'000'000'000'000

Observation. Notre tableau n'offre pas le volume représentant les valeurs de $\left(N-\frac{1}{2}\right)^2$: pour les obtenir, il suffira d'ajouter aux nombres (N^2-N) successifs une constante 0,25.

TABLEAU N° 3.

Indiquant les surfaces des fers ronds et leurs poids par mètre courant pour des diamètres croissant de 1 à 100 millimètres.

DIAMÈTRES en millimètres.	SURFACES en mètres carrés.	POIDS en kilogr. par mètre courant.	DIAMÈTRES en millimètres.	SURFACES en mètres carrés.	POIDS en kilogr. par mètre courant.	DIAMÈTRES en millimètres.	SURFACES en mètres carrés.	POIDS en kilogr. par mètre courant.
	m.	kil.		m.	kil.		m.	kil.
1	0,00'00'00'78	0,006	26	0,00'05'30'02	4,124	52	0,00'21'23'71	16,532
2	0,00'00'03'14	0,024	27	0,00'05'72'55	4,448	54	0,00'22'90'21	17,828
3	0,00'00'07'07	0,054	28	0,00'06'15'75	4,784	56	0,00'24'63'09	19,178
4	0,00'00'12'57	0,098	29	0,00'06'60'52	5,136	58	0,00'26'42'08	20,568
5	0,00'00'19'63	0,152	30	0,00'07'06'85	5,504	60	0,00'28'27'43	22,024
6	0,00'00'28'27	0,220	31	0,00'07'54'76	5,872	62	0,00'30'19'07	23,504
7	0,00'00'38'48	0,300	32	0,00'08'04'24	6,248	64	0,00'32'16'99	25,048
8	0,00'00'50'26	0,390	33	0,00'08'55'29	6,668	66	0,00'34'21'18	26,636
9	0,00'00'63'61	0,496	34	0,00'09'07'92	7,060	68	0,00'36'31'68	28,272
10	0,00'00'78'54	0,612	35	0,00'09'62'11	7,488	70	0,00'38'48'45	29,968
11	0,00'00'95'03	0,732	36	0,00'10'17'87	7,920	72	0,00'40'71'50	31,704
12	0,00'01'13'09	0,868	37	0,00'10'75'21	8,364	74	0,00'43'00'84	33,492
13	0,00'01'32'73	1,020	38	0,00'11'34'11	8,820	76	0,00'45'36'45	35,332
14	0,00'01'53'93	1,188	39	0,00'11'94'59	9,300	78	0,00'47'78'36	37,212
15	0,00'01'73'71	1,368	40	0,00'12'56'63	9,788	80	0,00'50'26'54	39,160
16	0,00'02'01'06	1,556	41	0,00'13'20'25	10,276	82	0,00'52'81'01	41,128
17	0,00'02'26'98	1,756	42	0,00'13'85'44	10,776	84	0,00'55'41'77	43,164
18	0,00'02'54'46	1,968	43	0,00'14'52'20	11,300	86	0,00'58'08'80	45,240
19	0,00'02'83'52	2,200	44	0,00'15'20'52	11,836	88	0,00'60'82'11	47,368
20	0,00'03'14'15	2,444	45	0,00'15'90'43	12,384	90	0,00'63'61'72	49,566
21	0,00'03'46'36	2,688	46	0,00'16'61'90	12,936	92	0,00'66'47'61	51,776
22	0,00'03'80'13	2,944	47	0,00'17'34'94	13,504	94	0,00'69'39'78	54,052
23	0,00'04'15'47	3,204	48	0,00'18'09'55	14,080	96	0,00'72'38'23	56,369
24	0,00'04'52'38	3,512	49	0,00'18'85'74	14,680	98	0,00'75'42'96	58,737
25	0,00'04'90'87	3,816	50	0,00'19'63'49	15,292	100	0,00'78'53'97	61,159

Digitized by Google

NOTES.

Digitized by Google

Digitized by Google

NOTES.

NOTE N° 1.

Sur la détermination du poids des câbles en fonction de la charge donnée.

Le câble d'un pont suspendu est soumis, non-seulement à l'action des poids donnés, mais encore à son propre poids. Or ce poids dépend de la section du câble, c'est-à-dire de sa résistance, et cette résistance elle-même est subordonnée à la charge qu'il doit supporter.

Soient t_n la tension du câble supportant un poids total P_n, y compris le poids du câble lui-même;

t' le coefficient de tension, de sorte qu'on ait $t'P_n = t_n$;

Γ_n le poids du câble que l'on cherche;

γ le poids dudit câble par mètre courant;

L la longueur du câble;

P' la somme des poids du plancher et de la partie des tiges comprises entre les horizontales tangentes, l'une à la courbe des chaînes, l'autre à la courbe inférieure du tablier;

ω le poids d'une barre de fer de 1 mètre de longueur capable de supporter 1000 kilogrammes d'après le coefficient de résistance adopté pour le câble;

Ω le poids des tiges de suspension en dehors des horizontales tangentes.

On a :

$$t_n = t'(P' + \Gamma_n + \Omega); \qquad (\alpha)$$

et comme le poids du câble est égal au poids γ du mètre courant multiplié par la longueur L de ce câble, on a aussi

$$\Gamma_n = \gamma L = \left(\frac{t_n}{1000}\,\omega\right) L, \qquad (\beta)$$

d'où

$$t_n = \frac{1000}{\omega}\,\gamma. \qquad (\gamma)$$

Digitized by Google

Égalant ensuite cette expression à l'expression (α), après avoir remplacé Γ_n par γL, il vient :

$$t'(P' + \gamma L + \Omega) = \frac{1000}{\omega}\gamma. \qquad (\varepsilon)$$

Équation de laquelle on tire, pour l'*expression des poids par mètre courant du câble :*

$$\gamma = \frac{t'(P' + \Omega)\omega}{1000 - \omega L t'}. \qquad (\delta)$$

La valeur de t' se déduit de la formule (65); elle a pour expression

$$t' = \sqrt{1 + \left(\frac{H_n - \frac{h}{2}}{2V_n}\right)^2}. \qquad (\lambda)$$

Si l'on veut abréger les calculs, on se sert du tableau n° 1, qui renferme, colonne 7, les valeurs de t' dont on a le plus souvent besoin dans la pratique. Si le rapport de la flèche à la corde, qui sert d'entrée, ne se trouvait pas compris dans le tableau, il suffirait de prendre une valeur proportionnelle pour le coefficient t'.

NOTE N° 2.

Sur l'expression pratique de la longueur de toutes les tiges de suspension d'un pont suspendu.

1er CAS. — Des ponts suspendus dont les tiges sont également espacées en projection horizontale.

Admettons, ce qui est peu éloigné de la vérité, que, pour ce cas, la forme de la courbe soit parabolique; on a (37) pour l'expression de la longueur d'une ordonnée,

$$y = \frac{\pi}{2Q}x^2; \qquad (a)$$

à la limite pratique,

$$\frac{\pi}{2Q} = \frac{V_n}{H^2_n}; \qquad (b)$$

et si les tiges sont espacées entre elles d'une quantité constante h; si, de plus, la dernière tige a pour numéro N, il vient en outre :

Digitized by Google

$$x = h\left(n - \frac{1}{2}\right)$$

$$H_n = h\left(N - \frac{1}{2}\right).$$

On a, par conséquent,

$$y = \frac{V_n}{\left(N - \frac{1}{2}\right)^2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{V_n}{\left(N - \frac{1}{2}\right)^2}\left(n^2 - n + \frac{1}{4}\right). \qquad (c)$$

Faisant ensuite la somme des termes variables en n, depuis $n = 1$ jusqu'à $n = N$ inclusivement, on obtiendra :

$$\Sigma^n y = \frac{V_n}{N^2 - N + \frac{1}{4}}\left(\frac{4N^3 - N}{12}\right), \qquad (d)$$

ou sensiblement pour la pratique,

$$\Sigma^n y = \frac{V_n}{N - 1}\left(\frac{N^2 - 1}{3}\right); \qquad (e)$$

et comme $N^2 - 1 = (N - 1)(N + 1)$, il vient en dernier lieu :

$$\Sigma^n y = \frac{V_n}{3}(N + 1). \qquad (f)$$

Si f_n est la flèche du tablier, et D la distance verticale comprise entre les deux horizontales tangentes, l'une à la courbe des chaînes, l'autre à la courbe inférieure du tablier, on aura pour la *longueur totale des tiges* :

$$\Sigma^n y = \left\{\left(\frac{V_n + f_n}{3}\right)(N + 1) + ND\right\}. \qquad (g)$$

2ᵉ CAS. — En supposant les tiges également espacées sur la chaîne dont la figure est supposée différer très-peu de celle d'une chaînette.

L'équation qui donne l'ordonnée de la courbe est, (155), en s'arrêtant au premier terme,

$$y_n = KS^2_n. \qquad (a')$$

Digitized by Google

Dans cette équation,

$$K = \frac{V_n}{S^2_n}, \qquad (b')$$

en désignant par l la longueur d'un des chaînons de la chaîne, et par n le numéro de la dernière tige, on a :

$$\left(N - \frac{1}{2}\right) l = S_n$$

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) l = S_n ;$$

et, par suite, en remplaçant, dans l'équation (a''), K par sa valeur, et substituant, au lieu de S_n et S_n, les valeurs précédentes,

$$y_n = \frac{V_n}{\left(N - \frac{1}{2}\right)^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 ; \qquad (c')$$

expression identique avec celle que nous avons trouvée précédemment (c), et qui, traitée de la même manière, donne, avec une exactitude suffisante pour la pratique,

$$\Sigma^n y_n = \frac{V_n}{3} (N+1). \qquad (d')$$

Ainsi donc, pratiquement parlant, l'expression de la longueur totale de toutes les tiges d'un pont suspendu est la même dans les deux cas ci-dessus ; seulement il faut bien se rappeler que dans le premier cette longueur totale correspond à une abscisse donnée, tandis que dans le second elle correspond à un arc donné.

Si, comme précédemment, f_n représente la courbure du plancher, et D la distance verticale entre les deux tangentes horizontales, on aura pour la longueur totale des tiges,

$$\Sigma^n y = \left\{ \left(\frac{V_n + f_n}{3}\right) (N-1) + DN \right\}. \qquad (g')$$

On peut encore arriver au même résultat, plus simplement, par les considérations suivantes :

L'aire comprise entre la chaîne parabolique et la tangente horizontale à cette courbe est égale à

$$\frac{1}{3} x . y = \frac{1}{3} V_n . H_n = \frac{V_n}{3} \left(N - \frac{1}{2}\right) h. \qquad (a'')$$

Mais cette aire est sensiblement égale à celle qui se trouve comprise entre le polygone

Digitized by Google

parabolique et le côté horizontal prolongé. Cette dernière est elle-même égale à la somme des trapèzes formés latéralement par les tiges de suspension et, haut et bas, par les câbles et le prolongement du côté horizontal; donc on a :

$$\frac{V_N}{3}\left(N-\frac{1}{2}\right)h=\left(\frac{V_1+V_2}{2}\right)h+\left(\frac{V_2+V_3}{2}\right)h+\ldots\ldots+\left(\frac{V_{N-1}+V_N}{2}\right)h; \quad (b'')$$

ajoutant à chaque membre $\frac{V_N}{2}$ et observant que, dans le polygone, $V_1=0$, il vient, après avoir supprimé le facteur commun h,

$$\frac{V_N}{3}(N+1)=[V_2+V_3+V_4+V_5+\ldots\ldots\ldots+V_{N-1}+V_N]. \quad (c'')$$

Mais le second membre, dont chacun des termes représente la longueur de l'une des tiges de suspension, n'est autre chose que la somme cherchée des longueurs de ces mêmes tiges; de sorte que l'on a, comme précédemment,

$$\Sigma^n y=\frac{V_N}{3}(N+1). \quad (d')$$

NOTE N° 3.

Expression en termes finis de la valeur de la composante horizontale Q de la chaînette et de la tangente à cette courbe.

L'expression (155) de l'ordonnée de la chaînette peut se mettre sous la forme suivante, en multipliant les deux membres par $\frac{\pi}{Q}$ et ajoutant 1 à chacun de ces membres :

$$\frac{\pi y}{Q}+1=\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2S^2}{Q^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^2S^2}{Q^2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{\pi^2S^2}{Q^2}\right)^3-\frac{5}{128}\left(\frac{\pi^2S^2}{Q^2}\right)^4\right]. \quad (a)$$

Mais le second membre n'est autre chose que le développement de l'expression

$$\sqrt{1+\left(\frac{\pi^2S^2}{Q^2}\right)};$$

on a donc :

Digitized by Google

$$\left(\frac{\pi y}{Q}+1\right)^2=1+\frac{\pi^2 S^2}{Q^2}. \qquad (b)$$

Et, par suite, après avoir effectué les opérations et les réductions,

$$\frac{\pi S}{2Q}=\frac{1}{\left(\frac{S}{y}-\frac{y}{S}\right)}=\frac{y}{S}\times\left(1+\frac{y^2}{S^2}\right)^{-1} \qquad (c)$$

d'où

$$Q=\left(\frac{S^2-y^2}{2y}\right)\pi=\left(\frac{S^2-V^2_n}{2V_n}\right)\pi. \qquad (d)$$

Si, en outre, on élève le second membre de (*c*) à la puissance —1, on obtient :

$$\frac{\pi S}{2Q}=\left[\frac{y}{S}\left\{1+\left(\frac{y^2}{S^2}\right)+\left(\frac{y^2}{S^2}\right)^2+\left(\frac{y^2}{S^2}\right)^3+\ldots\ldots\right\}\right]=\left\{\frac{y}{S}+\frac{y^3}{S^3}+\frac{y^5}{S^5}+\frac{y^7}{S^7}+\ldots\ldots\right\}. \qquad (e)$$

Résultat identique à celui que nous avons déduit de l'équation (155) par la *méthode du retour des suites.*

NOTE N° 4.

Sur la transformation de l'expression (9) *donnant les valeurs des ordonnées d'un polygone, en une autre fondée sur la théorie des moments, et passage de cette première équation à l'équation différentielle des courbes en équilibre sous l'action de poids.*

En remplaçant dans l'équation générale (9), qui donne les valeurs des ordonnées du polygone d'équilibre, les forces P_1, P_2, P_3,..... etc., par leurs valeurs tirées de (6), il vient :

$$V_n=\frac{1}{Q}\left[p_1h_1+(p_1+p_2)h_2+(p_1+p_2+p_3)h_3+\ldots\ldots+(p_1+p_2+\ldots\ldots+p_{n-1})h_{n-1}\right]. \qquad (a)$$

En ordonnant tous les termes du second membre par rapport à p, on a :

$$V_n=\frac{1}{Q}\left[p_1(h_1+h_2+h_3+\ldots\ldots+h_{n-1})+p_2(h_2+h_3+\ldots\ldots+h_{n-1})+\ldots\ldots+p_{n-1}h_{n-1}\right]. \qquad (b)$$

Mais la figure *a* donne :

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\ldots + h_{n-1} \\ x_2 = h_2 + h_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + h_{n-1} \\ x_3 = h_3 + h_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + h_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-1} = h_{n-1} \end{array}\right\} ; \qquad (c)$$

l'équation (*b*) devient donc, en remplaçant les facteurs en h_n par leurs équivalents en x_n (fig. *a*),

$$QV_n = [p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots\ldots + p_{n-1} x_{n-1}], \qquad (d)$$

qui exprime les relations entre les moments des forces rapportées au point B.

L'action de la force Q appliquée en A ne paraît pas ici parce que son moment est nul; si l'axe au lieu de passer par B passait à une distance K de ce point, il viendrait :

$$QV_n - QK = \Sigma^{n-1}(p_n x_n) - KQ ; \qquad (e)$$

équation où toutes les forces sont en évidence.

QV_n est le moment de la force Q appliquée en C.

QK est le moment de cette composante horizontale appliquée en A.

$\Sigma^{n-1}(p_n x_n)$ est la somme des moments de tous les poids appliqués au câble.

Si, enfin, h_n devient infiniment petit et égal à dx, et si les poids sont répartis uniformément sur l'horizontale, P_n deviendra égal à πx_n, et l'on aura l'équation suivante au lieu de l'équation (*a*) :

$$y = \frac{1}{Q}\int \pi x dx = \frac{\pi}{Q}\frac{x^2}{2}. \qquad (f)$$

Équation qui est en effet celle que nous avons obtenue (37) en passant du polygone à la courbe, et qui, comme on a pu le reconnaître, est celle d'une parabole dont le grand axe est vertical et dont le paramètre est égal à $\left(\frac{\pi}{2Q}\right)$.

Si au lieu de supposer le poids réparti sur la projection horizontale de la courbe, on le supposait uniformément réparti sur la courbe même, l'équation (15), qui donne les ordonnées du polygone en fonction de la longueur des côtés de ce polygone, deviendrait, en y faisant $l_n = dS$ et $P_n = \pi S$,

$$y = \frac{1}{Q}\int \left\{ (\pi S . dS) - \left(\frac{1}{2}\frac{\pi^3 S^3 . dS}{Q^2}\right) + \left(\frac{3}{8}\frac{\pi^5 S^5 . dS}{Q^4}\right) - \left(\frac{5}{16}\frac{\pi^7 S^7 . dS}{Q^6}\right) + \text{etc.} \right\}, \qquad (g)$$

et en intégrant,

$$y = \frac{1}{Q}\left\{ \left(\frac{\pi S^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{\pi^3 S^4}{4Q^2}\right) + \left(\frac{3}{8}\frac{\pi^5 S^6}{6Q^4}\right) - \left(\frac{5}{16}\frac{\pi^7 S^8}{Q^6}\right) + \ldots\ldots \right\}. \qquad (h)$$

Digitized by Google

Équation identique avec celle de la chaînette (155), comme il était du reste facile de le prévoir.

Les mêmes raisonnements appliqués à l'équation générale (19) donneront :

$$x = \frac{dS}{2} + \int \left\{ dS - \left(\frac{1}{2}\frac{\pi^2 S^2 . dS}{Q^2}\right) + \left(\frac{3}{8}\frac{\pi^4 S^4 . dS}{Q^4}\right) - \left(\frac{5}{16}\frac{\pi^6 S^6 . dS}{Q^6}\right) + \ldots\ldots \right\}, \quad (k)$$

et en intégrant et négligeant le terme en dS après l'intégration, on aura :

$$x = \left\{ S - \frac{1}{2.3}\frac{\pi^2 S^3}{Q^2} + \frac{3}{8\times 5}\cdot\frac{\pi^4 S^5}{Q^4} - \frac{5}{16\times 7}\frac{\pi^6 S^7}{Q^6} + \ldots\ldots \right\} \quad (l)$$

comme à l'équation (158).

NOTE N° 5.

Sur les relations qui existent entre les polygones d'équilibre paraboliques et ceux qui résultent de l'intersection des lignes qui représentent les tensions en directions.

Nous avons vu (34) que l'équation des ordonnées du polygone d'équilibre parabolique est

$$V_n = \frac{h' p_1}{2Q}(n^2 - n). \quad (a)$$

Si l'on veut enlever à cette équation son caractère de discontinuité, il faut faire disparaître la variable indépendante n qui, par hypothèse, ne doit croître que par unité, et la remplacer par une autre variable susceptible d'une variation dont la grandeur peut être quelconque Faisons donc

$$p_1 = \pi h'$$
$$x = \left(n - \frac{1}{2}\right) h' \quad \text{ou} \quad nh' = x + \frac{h'}{2}$$

et l'équation ci-dessus deviendra :

$$y = \frac{\pi}{2Q}\left(x^2 - \frac{h'^2}{4}\right). \quad (b)$$

Cette équation est celle d'une parabole rapportée aux axes rectangulaires en A', figure b, et ayant pour paramètre $\frac{\pi}{2Q}$.

Digitized by Google

En faisant $x = 0$ dans cette équation (b), il vient :

$$-y = \frac{\pi}{2Q}\left(\frac{h'^2}{4}\right);$$

c'est-à-dire que l'axe des x passe au-dessus du sommet de la parabole d'une quantité représentée par $\frac{\pi}{2Q}\frac{h'^2}{4}$, égale au produit du paramètre par le quart du carré de la distance entre deux tiges consécutives.

Cette parabole coupe l'axe des x à une distance x_1, que l'on obtiendra en faisant $y = 0$ dans l'équation (b) ; on aura alors :

$$x_1 = \frac{h'}{2};$$

résultat facile à prévoir par la construction du polygone inscrit, dont le premier sommet se trouve sur l'axe des x à la distance $h'_0 = \frac{h'}{2}$.

Quand h' s'évanouit, on a

$$y = \frac{\pi}{2Q}x^2. \qquad (b')$$

Si nous prolongeons les lignes qui représentent les tensions des divers éléments (fig. b), nous obtiendrons un nouveau polygone par les intersections de ces droites. Si nous désignons le premier, A, B, C, D, etc., par le nom de *polygone principal*, et le second, A′, B′, C′, D′,..... par celui de *polygone auxiliaire*, nous voyons qu'entre ces deux polygones il doit exister une certaine relation, puisque, réciproquement, l'un détermine l'autre.

Cherchons cette relation :

En supposant l'origine des coordonnées en A″, la droite qui passe par P_n a pour équation :

$$\psi = a(x - nh' - Q); \qquad (c)$$

et celle qui passe par P_{n-1},

$$\psi_1 = a'(x_1 - nh' + h' - Q). \qquad (d)$$

Le point où les droites se coupent, et qui est un point de la courbe auxiliaire, s'obtiendra en faisant

$$\psi = \psi_1 \quad \text{et} \quad x = x_1,$$

et l'on aura :

$$0 = x(a - a') + nh'(a' - a) + Q(a' - a) - a'h'. \qquad (e)$$

Digitized by Google

Mais on a aussi :

$$a = \frac{P_n}{Q}, \quad a' = \frac{P_{n-1}}{Q}; \qquad (f)$$

d'un autre côté, si l'on désigne par ω l'angle que forme avec l'horizontale la ligne sur laquelle se trouvent les extrémités des poids P_n, l'on a tang. $\omega = \pi$, et alors

$$P_n = \pi n h, \quad P_{n-1} = \pi (n-1) h; \qquad (g)$$

donc

$$a = \frac{\pi}{2Q} 2nh', \quad a' = \frac{\pi}{2Q} (2nh' - 2h') \qquad (h)$$

et

$$\left.\begin{aligned} a - a' &= \frac{\pi}{2Q} 2h' \\ a' - a &= -\frac{\pi}{2Q} 2h' \end{aligned}\right\}. \qquad (i)$$

Substituant ces valeurs dans (e) nous aurons :

$$0 = \frac{\pi}{2Q} [2h'x - 2nh'^2 - 2Qh' - 2nh'^2 + 2h'^2] = \frac{\pi}{2Q} [2h'x - 4nh'^2 - 2Qh' + 2h'^2]. \qquad (k)$$

Supprimant le facteur commun à tous les termes, on tire :

$$n = \frac{x - Q + h'}{2h'}. \qquad (l)$$

Si maintenant nous substituons dans l'équation (c) les valeurs de a et n, nous arriverons à *l'équation* suivante, en x et y, pour la *courbe auxiliaire passant par les sommets du polygone auxiliaire :*

$$y = \frac{\pi}{2Q} \cdot \frac{1}{2} [x^2 - 2Qx + Q^2 - h'^2]. \qquad (m)$$

Si nous voulions rapporter cette courbe à l'axe vertical de la parabole, lequel passe en A', il faudrait faire $x = x_1 + \frac{h'}{2}$ dans l'équation ci-dessus, et nous aurions :

$$y = \frac{\pi}{2Q} \cdot \frac{1}{2} \left\{ x^2_1 + x_1 (h' - 2Q) + Q^2 - \frac{3}{4} h'^2 - Qh' \right\}. \qquad (n)$$

Faisons, pour la discussion,

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\pi}{2Q} = \frac{1}{A} \\ &(h' - 2Q) = B \\ &\left(Q^2 - \frac{3}{4}h'^2 - Qh'\right) = C \end{aligned}\right\} \qquad (o)$$

l'équation (n) sera de la forme :

$$2Ay = x^2_1 + Bx_1 + C. \qquad (p)$$

La position du grand axe vertical de la courbe sera déterminé par une valeur particulière de a_1 satisfaisant à la condition $\frac{dy}{dx_1} = 0$: cette valeur est $x_1 = -\frac{B}{2}$; en la substituant dans l'équation (p) on a, pour l'ordonnée correspondant au point le plus bas,

$$-y = \frac{\pi}{2Q}\frac{h'^2}{2}; \qquad (q)$$

c'est-à-dire que la courbe auxiliaire descend deux fois plus bas au-dessous de l'axe des x que la courbe principale.

Quand les côtés du polygone inscrit dans la courbe principale deviennent infiniment petits, la quantité h' s'évanouit et l'équation (n) devient :

$$y = \frac{\pi}{2Q}\frac{1}{2}\,[x^2 - 2Qx + Q^2]. \qquad (r)$$

Il est évident que, dans ce cas, l'origine des coordonnées est reportée au point A'', intersection de l'oblique et de l'horizontale, par l'évanouissement de h'.

La valeur de x, qui donnera la position de l'axe vertical de cette courbe inscrite dans le polygone auxiliaire, sera la valeur $x = Q$ correspondante à $\frac{dy}{dx} = 0$. Mais pour $x = Q$ l'équation (r) donne $y = 0$; donc la courbe sera tangente à l'axe des x comme dans le cas de la courbe principale, quand celle-ci se confond avec le polygone inscrit.

Mais l'axe vertical de la parabole principale passe à une distance $\frac{h'}{2}$ du point A'' d'intersection de l'oblique avec l'axe des x; si donc nous voulons que les paraboles aient même axe, il suffira de faire $Q = \frac{h'}{2}$ et aussi $x = x' + \frac{h'}{2}$, et nous aurons :

$$y = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2Q}x'^2; \qquad (s)$$

équation d'une parabole rapportée à son sommet, mais dont le paramètre est moitié de celui de la parabole principale.

Digitized by Google

Nous donnons ici le nom de *paramètre* aux quantités $\frac{\pi}{2Q}$ et $\frac{\pi}{4Q}$ qui sont les coefficients de la variable indépendante; il faut bien se rappeler que, dans l'équation de la parabole ordinaire, qui est de la forme $y^2 = px$, la variable indépendante étant au contraire celle qui est ici la fonction, l'on a entre les paramètres des deux systèmes d'équation la relation

$$p = \frac{2Q}{\pi} \quad \text{ou} \quad p = \frac{4Q}{\pi}.$$

Comme il est important d'avoir une idée bien exacte des relations qui peuvent exister entre les deux polygones ou les deux courbes principales et accessoires, nous allons traduire linéairement les résultats algébriques qui donnent les principales circonstances de la courbe.

Commençons par la courbe principale :

h' conservant une valeur finie, on voit, équation (b), que la courbe coupe l'axe des x à deux endroits $x = \pm \frac{h'}{2}$. Quant à l'axe vertical de la courbe, il correspond à l'axe des ordonnées, puisque la tangente horizontale à la courbe correspond à $x = 0$.

La tangente à la courbe, au point où celle-ci rencontre l'axe des x, a pour expression

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\pi}{2Q}\right) 2x = \left(\frac{\pi}{2Q}\right) h'; \qquad (1)$$

mais π étant égal à la tangente de l'angle que fait l'oblique avec l'horizontale, $\frac{\pi h'}{2}$ représente la moitié de l'ordonnée de l'oblique située à la distance h' du point A, ou la moitié de la valeur linéaire du poids placé à la distance h' du point A. Si donc on prend le rapport de $\frac{\pi h'}{2} = AA'$ à la composante $Q = A'B''$, on aura, figure c, AB'' pour la direction de la tangente à la courbe au point où celle-ci coupe l'axe des x. On voit donc que $\frac{\pi h'}{2}$ étant constant, quand Q sera plus petit que $\frac{h'}{2}$, égal à A'B''' par exemple, l'oblique AC sera dans l'intérieur de l'angle BAX', et la courbe principale coupera cette oblique AC. La tangente en question se confond avec l'oblique quand $\frac{h'}{2} = Q$.

Quant à l'abaissement du sommet au-dessous de l'horizontale HH', il est égal, comme nous l'avons vu, à $-\left(\frac{\pi}{2Q}\right)\frac{h'^2}{4} = y = -\frac{\left(\frac{\pi h'}{2}\right)}{4} \times \frac{h'}{Q}$. Mais $\frac{\pi h'}{2} = ac$; donc cet abaissement est égal au quart de l'ordonnée ac de l'oblique AC, multiplié par le rapport de h' à Q, ou par celui de AB à AB'.

On voit donc que, quand on substitue au polygone une parabole ayant même flèche et même ouverture, on s'écarte de la parabole circonscrite, puisque celle-ci a sur le premier un excès de flèche représenté par aa'; mais comme cette quantité est toujours très-faible,

Digitized by Google

elle est insignifiante dans les applications, et l'on peut en conséquence admettre l'une pour l'autre.

Quand h' s'évanouit, aa' disparaît et la parabole devient tangente au point a (figure d).

Passons maintenant à l'examen de la parabole auxiliaire.

Nous savons que son équation, rapportée aux coordonnées dont l'origine est en A, est :

$$y = \frac{\pi}{4Q}(x^2 - 2Qx + Q^2 - h'^2). \qquad (2)$$

La position de l'axe vertical sera déterminée par la valeur de x satisfaisant à la relation $\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{4Q}(2x - 2Q) = 0$, ou

$$x = Q; \qquad (3)$$

et l'abaissement de la courbe est

$$y = -\left(\frac{\pi}{4Q}\right) h'^2 = -\left(\frac{\pi}{2Q}\right)\left(\frac{h'^2}{2}\right), \qquad (4)$$

c'est-à-dire que cet abaissement est égal au double de celui de la parabole principale.

L'axe des x est coupé à une distance donnée par la relation suivante déduite de l'équation (2), dans laquelle on fait $y = 0$:

$$x = Q + h'; \qquad (5)$$

résultat facile à prévoir, puisque c'est en effet en ce point e que la première résultante oblique coupe l'horizontale qui est la tension horizontale, et qui par conséquent donne en e un des sommets du polygone auxiliaire (fig. e).

Quant à la tangente, elle a pour expression $\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{2Q}(x - Q)$, et, en remplaçant x par sa valeur $x = Q + h'$ pour le point où la courbe coupe l'axe des x, il vient $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\pi}{2Q}\right) h'$. Ainsi la tangente à la courbe auxiliaire, au point où celle-ci rencontre l'axe des x, est égale à celle de la courbe principale pour le même point.

Quand le polygone auxiliaire se confond avec la courbe circonscrite, auquel cas $h' = 0$, l'équation (2) devient :

$$y = \left(\frac{\pi}{4Q}\right)(x - Q^2), \qquad (6)$$

et l'axe vertical est encore situé à une distance Q du point A (figure e); mais alors la courbe est tangente en a à l'horizontale qui sert d'axe des abscisses.

M. Julien a démontré d'une manière très-simple et très-ingénieuse, dans les *Annales des ponts et chaussées*, par des considérations tirées des propriétés mécaniques des polygones,

Digitized by Google

que la chaîne d'un pont suspendu à tiges équidistantes, dont le plancher supporte un poids uniformément réparti, est identique de forme avec le polygone dont se servent les ingénieurs dans les tracés de route, et que l'on désigne sous le nom de *raccordement parabolique* (*Annales des ponts et chaussées*, 1re série, tome XIX).

Le tracé de ce raccordement parabolique consiste à prolonger les côtés extrêmes du polygone, ED, E_1D_1, connus en direction, jusqu'à leur rencontre en O_4 sur l'axe vertical. La ligne EO_4 coupe les verticales distantes entre elles de $\frac{h'}{2}$ en des points d_1c_1, c_1b_1, b_1a_1; alors on joint le point D_1, où E_1O_4 coupe la verticale $\delta_1 b$ et qui est un sommet du polygone, avec le premier point d_1c_1; on a un deuxième côté D_1C_1 du polygone et un troisième sommet C_1, par la rencontre de D_1, d_1c_1 avec γ_1C_1. On joint ce sommet C_1 avec le deuxième point c_1b_1, ce qui donne un troisième côté C_1B_1 et un quatrième sommet B_1; etc.

Comme on le voit ici, le polygone A, B, C, D, E, a tous ses côtés parallèles aux obliques t_1, t_2, t_3, etc., qui représentent respectivement les tensions des côtés de ce polygone dont la composante horizontale Q est représentée linéairement par $\frac{h'}{2}$.

Ces obliques t_1, t_2, t_3,.... etc., prolongées, forment par leurs intersections un polygone A', B', C', D', E'; et ce nouveau polygone a tous ses côtés parallèles aux obliques t'_1, t'_2, t'_3, ... etc.

Le premier polygone a pour expression des coordonnées de ses sommets

$$V_n = \frac{h'p}{Q}(n^2-n) = \frac{np}{Q}h'(n-1), \qquad (7)$$

c'est-à-dire que ses ordonnées sont celles d'un polygone parabolique dont le paramètre est moitié de celui du premier polygone.

Au lieu de nous étendre davantage sur les propriétés des courbes particulières dont nous venons d'établir les formules, cherchons quelles sont les expressions générales des courbes A_1B_1, A_2B_2 et $A''B''$ (figure *g*) supposées liées entre elles par les rapports que nous avons établis plus haut; c'est-à-dire que la courbe A_2B_2 étant donnée par son équation $y = f(x)$, la tangente à la courbe A_1B_1 au point *a* sera égale et de signe contraire au rapport $\frac{-y}{Q}$; $-y$ étant l'ordonnée du point *a* de la courbe A_2B_2 et Q étant une quantité constante. La courbe $A''B''$ ayant pour tangente les obliques t et t', dont les valeurs respectives sont $\frac{-y}{Q}$ et $\frac{-y'}{Q}$: y et y' étant les ordonnées des points où ces droites t et t' rencontrent la première courbe.

Il résulte de ce mode de génération de courbe que tous les éléments de la courbe $A''B''$ doivent être parallèles à ceux de la courbe A_1B_1. L'on a donc, si x et y sont les coordonnées de la courbe A_2B_2 dont l'équation est $y = f(x)$, si x et z sont les coordonnées de la courbe A_1B_1, et ε et φ celles de la courbe $A'B''$, les formules suivantes :

$$y = f(x), \qquad (8)$$

Digitized by Google

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{Q} \quad \text{d'où} \quad dz = \frac{y}{Q}\,dx = \frac{f(x)}{Q}\,dx, \tag{9}$$

et

$$z = \frac{1}{Q}\int f(x)\,dx + C; \tag{10}$$

c'est à-dire : 1° que la courbe A_1B_1 sera d'un degré plus élevé que la courbe A_2B_2; 2° que les ordonnées de la courbe A_1B_1 seront proportionnelles aux aires comprises entre la courbe A_2B_2 et l'axe des x; 3° enfin, que les ordonnées de la courbe A_2B_2 exprimeront les coefficients différentiels correspondants de la courbe A_1B_1.

En outre, pour la courbe $A''B''$, si l'on pose

$$a = \text{tang}\,\alpha \quad \text{et} \quad a' = \text{tang}\,\alpha',$$

on a :

$$\varphi = am, \quad \varphi = a'm' = a'(m - \Delta x), \tag{11}$$

et

$$a = \frac{y}{Q} = \text{tang}\,\alpha, \quad a' = \frac{y + \Delta y}{Q} = \text{tang}\,\alpha', \quad \frac{m}{\varphi} = \frac{Q}{y}; \tag{12}$$

d'où

$$m = Q\,\frac{\varphi}{y}. \tag{13}$$

On tire de (11) :

$$am = a'(m - \Delta x);$$

ou encore, en mettant pour a, a' et m leurs valeurs (12) et (13) :

$$\frac{y}{Q}\,Q\,\frac{\varphi}{y} = \frac{y + \Delta y}{Q}\left(Q\,\frac{\varphi}{y} - \Delta x\right). \tag{14}$$

Réduisant et passant à la limite, cas auquel le produit différentiel du second ordre $dydx$ s'évanouit, il vient :

$$\varphi = \left(\frac{1}{Q}\,y^2\,\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right). \tag{15}$$

Telle est l'expression de l'ordonnée de la courbe $A''B''$; mais comme $y^2 = f^2(x)$ et $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, il s'ensuit que l'équation (15) pourra encore se mettre sous cette forme :

$$\varphi = \frac{y^2}{Q}\,\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{Q}\,\frac{f^2(x)}{f'(x)}; \tag{16}$$

Digitized by Google

c'est-à-dire que si l'expression $f(x)$ est algébrique, l'équation de la courbe A'B'' sera d'un degré plus élevé que celle de la courbe A_2B_2, ou de même degré que celle de la courbe A_1B_1.

La valeur de l'abscisse ε s'obtiendra de la manière suivante :

On a d'abord :

$$\varepsilon = (x + Q + m) \tag{17}$$

et

$$\frac{m}{\varphi} = \frac{d\varepsilon}{d\varphi};$$

d'où

$$m = \frac{d\varepsilon}{d\varphi}\varphi; \tag{18}$$

ce qui donne pour la valeur de ε :

$$\varepsilon = x + Q + \frac{d\varepsilon}{d\varphi}\varphi = x + Q + \frac{\varphi}{\frac{d\varphi}{d\varepsilon}}; \tag{19}$$

mais

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon} = \frac{dz}{dx} = \frac{f(x)}{Q} = \frac{y}{Q};$$

donc l'équation (19) devient :

$$\varepsilon = x + Q + \frac{\varphi}{\frac{dz}{dx}} = x + Q + \frac{\frac{y^2\ dx}{Q\ .\ dy}}{\frac{dz}{dx}} = x + Q + \frac{y}{\frac{dy}{dx}}. \tag{20}$$

On aurait pu arriver à l'expression de la valeur de ε en posant immédiatement la condition de génération, qui est

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon} = \frac{y}{Q} \quad \text{d'où} \quad d\varphi = \frac{y}{Q}\,d\varepsilon, \tag{21}$$

et en prenant la valeur de $d\varphi$ fournie par l'équation (15), et qui donne :

$$d\varphi = \frac{1}{Q}\,d\left(\frac{y^2}{\frac{dy}{dx}}\right) = \frac{1}{Q}\left\{\frac{\frac{dy}{dx}\,2ydy - y^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right\}. \tag{22}$$

L'équation (21) devient donc :

Digitized by Google

$$\frac{yd\varepsilon}{Q} = \frac{1}{Q}\left\{\frac{\frac{dy}{dx}\,2ydy - y^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right\},$$

et réduisant :

$$d\varepsilon = \left\{\frac{\frac{dy}{dx}\,2dy - yd\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right\}; \qquad (23)$$

puis préparant cette équation de manière à la rendre intégrale, il vient :

$$\varepsilon = \int\left(\frac{\frac{dy}{dx}\,dy}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) + \int\left(\frac{\frac{dy}{dx}\,dy - yd\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) = x + \frac{y}{\frac{dy}{dx}} + C. \qquad (24)$$

Or si l'on remarque que quand $x = 0$ l'on obtient $\varepsilon = C = Q$, il vient, en dernier lieu, pour la valeur de ε,

$$\varepsilon = x + \frac{y}{\frac{dy}{dx}} + Q. \qquad (25)$$

Résultat identique à celui que nous avons obtenu en suivant une autre marche.

Comme nous l'avons vu plus haut, la courbe A_1B_1 de la figure *g* sera d'un degré plus élevé que la courbe A_2B_2. Si donc on reprend la courbe A_2B_2, figure *h*, cette courbe donnera lieu, d'après le mode de génération que nous avons indiqué, à une courbe A_3B_3 moins élevée d'un degré que A_2B_2, ou de deux degrés moins élevée que la courbe primitive A_1B_1 de la figure *g*. En reprenant une deuxième fois sur l'épure *i* la courbe A_3B_3, elle donnera lieu à la courbe $A_{n-2}B_{n-2}$, moins élevée d'un degré que la courbe A_3B_3, et par conséquent moins élevée de trois degrés que la courbe primitive A_1B_1.

En général, le nombre d'opérations que l'on fera sur la courbe primitive déterminera l'abaissement du degré de l'équation de cette courbe.

Si donc on fait autant d'opérations qu'il y a d'unités moins une dans le degré de l'équation de la courbe, on arrivera à la ligne droite.

Par conséquent, si après une série d'opérations faites sur la courbe A_1B_1, figure *g*, nous obtenons, figure *k*, une ligne droite inclinée $A_{n-1}B_{n-1}$, et s'il a fallu quatre opérations, par exemple, pour arriver à cette droite $A_{n-1}B_{n-1}$, nous en conclurons que la courbe A_1B_1 est du cinquième degré.

Il ne nous restera plus maintenant, pour déterminer graphiquement les valeurs du coeffi-

Digitized by Google

cient de l'équation, qu'à reprendre, figure l, la droite $A_{n-1}B_{n-1}$, laquelle nous donnera, en suivant les mêmes constructions, une droite A_nB_n parallèle à l'axe des x, et dont la distance à cet axe sera une quantité proportionnelle au coefficient cherché.

Ce que nous venons de dire peut donc nous servir à découvrir, par des procédés graphiques, le degré et l'équation des courbes construites sur certaines données expérimentales et pouvant représenter certaines lois physiques; courbes qui, aujourd'hui, sont employées très-fréquemment par les ingénieurs.

Ce qui précède ne peut s'appliquer rigoureusement qu'aux courbes qui peuvent être représentées par des équations algébriques à un seul terme dont les exposants sont entiers et finis.

Nous examinerons dans une note, que nous nous proposons de publier à part, quels sont les procédés graphiques par lesquels on peut arriver à découvrir le degré d'une courbe quelconque et la forme de l'équation satisfaisant à cette courbe d'une manière suffisante pour les besoins de la pratique.

NOTE N° 6.

D'une expression plus exacte des ordonnées de la chaînette.

L'équation générale qui fournit les ordonnées de la chaînette est (154) :

$$V_n = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\pi}{Q}\right) l^2 \Sigma^{n-1}(n) \\ - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^3 l^4 \Sigma^{n-1}(n)^3 \\ + \frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^5 l^6 \Sigma^{n-1}(n)^5 \\ - \frac{5}{16}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^7 l^8 \Sigma^{n-1}(n)^7 \\ + \ldots\ldots \end{array} \right\}. \qquad (a)$$

Pour obtenir l'équation (156), nous sommes passés d'abord par la courbe limite, ayant même flèche et même corde que le polygone; l'équation (156) fournit donc des ordonnées plus grandes que les ordonnées réelles de la chaînette. Or si l'on remarque que

Digitized by Google

$$\Sigma^{n-1}(n) = \frac{n^2-n}{2} = \frac{1}{2}(n^2-n)$$

$$\Sigma^{n-1}(n)^2 = \frac{n^4-2n^3+n^2}{4} = \frac{1}{4}(n^2-n)^2$$

$$\Sigma^{n-1}(n)^3 = \frac{2n^6-6n^5+5n^4-n^2}{12} = \frac{1}{6}(n^2-n)^3 - \frac{1}{12}(n^4-2n^3+n^2)$$

$$\vdots$$

etc.....

on voit qu'en substituant dans l'équation (a) les termes en (n^2-n), de ces valeurs, à la place des symboles correspondants $\Sigma^{n-1}(n)^m$, on obtient une équation :

$$V_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^2 l^2(n^2-n) - \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^3 l^4(n^2-n)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^5 l^6(n^2-n)^3 - \frac{5}{128}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^7 l^8(n^2-n)^4 + \ldots \quad (b)$$

qui est plus exacte que l'équation (156); d'abord parce que les deux premiers termes, qui fournissent les chiffres les plus importants, ceux de l'ordre le plus élevé de la valeur de V_n, sont rigoureusement exacts; ensuite, dans le troisième terme, l'erreur étant :

$$\frac{3}{8} \times \frac{1}{12}(n^4-2n^3+n^2)\left(\frac{\pi}{Q}\right)^5 l^6 = \frac{1}{32}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^5 l^6(n^4-2n^3+n^2),$$

$\left(\text{erreur très-faible à cause de la petitesse du rapport } \frac{\pi}{Q}\right)$, celle du troisième terme de l'équation (156) est :

$$\frac{1}{32}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^5 l^6\left(40n^4-80n^3+46n^2-6n+\frac{1}{2}\right);$$

et il est facile de s'assurer que cette erreur surpasse la précédente.

On verrait de même que l'erreur du quatrième terme de l'équation (156) surpasse celle du quatrième terme de l'équation (b).

Si nous comparons l'erreur $\frac{1}{32}\left(\frac{\pi}{Q}\right)^5 l^6(n^4-2n^3+n^2)$ du troisième terme de l'équation (b) avec ce troisième terme lui-même, nous voyons que cette erreur en est une fraction représentée par

$$e = \frac{1}{2(n^2-n)}.$$

Digitized by Google

Par conséquent elle diminue à mesure que n augmente :

$$\text{Pour} \quad n = 2 \quad \text{on a} \quad e = \frac{1}{4}$$

$$\text{Pour} \quad n = 10 \qquad e = \frac{1}{180}$$

$$\vdots$$

etc.

Or, si l'on se reporte au paragraphe [258], on voit que le troisième et le quatrième terme de l'équation des ordonnées de la chaînette n'ont d'influence, en général, que sur les décimales du quatrième au cinquième ordre, dans les valeurs de ces ordonnées ; on peut donc regarder l'équation (b) comme presque rigoureusement exacte.

NOTE N° 7.

Ponts à chaînes en dessous.

Dans le cours de ce mémoire, nous avons appliqué les formules générales, qui donnent les conditions d'équilibre des polygones, aux ponts suspendus dont les chaînes sont placées au-dessus du plancher.

Mais quand les chaînes sont placées en dessous, comme dans les figures c'_1 et d'_1, les formules demandent pour être appliquées des modifications qui dépendent de la répartition nouvelle des poids des tiges, des câbles et du plancher.

Dans les cas ordinaires, le plancher au lieu d'être supporté par des tiges de suspension, qui peuvent être flexibles, repose sur les câbles au moyen de supports rigides. Ce mode de résistance nécessite des formes particulières et des sections plus fortes que dans le premier cas. Indépendamment de ces causes, dues à la forme et à la section des tiges, il y en a encore une autre qui est due à la longueur des supports qui, dans ce dernier cas, sont les ordonnées complémentaires de la courbe des chaînes en dessus, c'est-à-dire les différences entre les ordonnées dans le système ordinaire et la flèche.

Dans les ponts de cette espèce, la charge étant placée au-dessus du point de suspension et non au-dessous, l'équilibre est instable relativement au câble de suspension qui forme la série des points d'appui du plancher. Aussi pour empêcher le déversement des tiges est-on dans l'usage de les relier entre elles de manière à donner à tout le système une forme invariable.

Digitized by Google

Dans le cas le plus ordinaire, les tiges réunies deux à deux ont l'apparence de fermettes dont les poids peuvent être considérés comme proportionnels aux longueurs des supports. Ce sont alors ces nouveaux poids, dont la loi doit être introduite dans les formules générales, qui nous donneront les formules particulières applicables au cas dont il s'agit.

Quand la loi de répartition du poids des fermettes, n'étant plus susceptible d'être exprimée algébriquement, ne peut plus être introduite dans les formules, il faut recourir à l'emploi des procédés graphiques pour connaître la forme d'équilibre du câble.

Nous ne nous occuperons donc, dans ce qui va suivre, que du cas où *les poids des fermettes sont proportionnels aux longueurs des supports* et nous admettrons des tiges équidistantes sur l'horizontale.

Les forces qui déterminent l'équilibre du câble, dans ce cas, peuvent se diviser, comme dans les ponts à chaînes en dessus, en trois groupes :

1° Le poids du tablier ;
2° Le poids des câbles ;
3° Le poids des tiges.

Le plancher et les câbles étant, par hypothèse, disposés comme nous l'avons admis dans les ponts à chaînes en dessus, les termes qui expriment l'influence de leurs poids sur la forme d'équilibre de la courbe seront les mêmes que ceux de la formule (91). Nous n'aurons donc à modifier que le dernier terme relatif à l'influence des tiges de suspension.

Pour cela, considérons la figure (m) et représentons par A, B, C la courbure du plancher du pont à chaînes en dessous et A, B', C la chaîne de ce même pont.

Les longueurs des supports de ce pont peuvent se diviser en deux parties :

1° La partie f'_n comprise entre l'horizontale AC et la courbe du plancher que nous supposerons de même nature que celle des câbles.

2° La partie V'_n comprise entre l'horizontale AC et la courbe des chaînes.

De sorte que la longueur de ce support sera égale à

$$f'_n + V'_n. \qquad (1)$$

La somme des longueurs des supports du polygone, jusqu'au sommet n, sera donc égale à

$$\Sigma^{n-1} f'_n + \Sigma^{n-1} V'_n ; \qquad (2)$$

et le poids de tous ces supports, depuis l'axe jusqu'au sommet n, sera égal à

$$\Sigma^{n-1} (f'_n + V'_n)\, \omega', \qquad (3)$$

ω' étant le poids du mètre de hauteur de ces supports y compris les liens formant fermettes qui les réunissent.

Digitized by Google

Mais remarquons que, dans la figure (m), si la courbe A, B', C représente la forme des chaînes d'un pont à câbles en dessus, et si A', B', C' représente la courbure du plancher de ce dernier pont, nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} V'_n &= V'_N - V_n \\ f'_n &= f'_N - f_n \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

De sorte que la somme des poids des supports pourra être exprimée en fonction de la somme des poids des tiges, et alors il viendra :

$$\Sigma^{n-1}(f_n + V'_n)\,\omega' = [\Sigma^{n-1}(V'_N - V_n) + \Sigma^{n-1}(f'_N - f_n)]\,\omega'.$$

Cette expression peut encore se mettre sous la forme :

$$\Sigma^{n-1}(f'_n + V'_n)\,\omega' = [\Sigma^{n-1}(V'_N + f'_N) - \Sigma^{n-1}(V_n + f_n)]\,\omega' = \Sigma^{n-1}(V'_N + f'_N)\omega' - \Sigma^{n-1}(V_n + f_n)\omega'. \qquad (5)$$

Cette formule nous donne la somme des poids des supports jusqu'au sommet n. Pour l'introduire dans (91), il faudra sommer une seconde fois cette première sommation. Nous aurons, en l'indiquant :

$$\Sigma^{n-1}\Sigma^{n-1}(V'_N + f'_N)\,\omega' - \Sigma^{n-1}\Sigma^{n-1}(V_n + f_n)\,\omega'; \qquad (6)$$

sous cette nouvelle forme il est facile de voir que le deuxième terme $\Sigma^{n-1}\Sigma^{n-1}(V_n + f_n)\,\omega'$ est le dernier terme du second membre de l'équation (91), et que le terme $\Sigma^{n-1}\Sigma^{n-1}(V'_N + f'_N)\omega'$ est la double sommation du poids de supports d'une longueur constante $(F + f)$, d'un poids ω' par mètre courant et agissant sur le sommet n. En effectuant cette sommation, on a :

$$\Sigma^{n-1}\Sigma^{n-1}(V'_N + f'_N)\,\omega' = (V'_N + f'_N)\,\omega'\,\Sigma^{n-1}(n-1) = (V'_N + f'_N)\,\omega'\,\frac{n^2 - 3n + 2}{2}. \qquad (7)$$

Si nous exprimons maintenant la valeur de Ω qui entre dans le deuxième terme de l'expression (6) en fonction de ω', nous aurons :

$$\Omega = \frac{1}{3}(V'_N + f'_N)\,\omega'(N-1), \qquad (8)$$

et l'expression (6) deviendra :

$$(V'_N + f'_N)\,\omega'\left\{\frac{n^2 - 3n + 2}{2} - \frac{h^3}{3H^3_N}(N-1)\left(\frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4}\right)\right\}. \qquad (9)$$

L'équation de l'ordonnée rapportée au sommet B' de la courbe des câbles sera donc :

Digitized by Google

$$V'_n = \frac{h}{Q'} \left\{ \begin{array}{l} p\,[1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+(n-1)] \\ +\gamma h\,[1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots+(n-1)] \\ +\dfrac{2\gamma V^2}{3H^4_n} h^3 [1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+(n-1)^3] \\ +(V'_n+f'_n)\,\omega' \left\{ \dfrac{n^2-3n+2}{2} - \dfrac{h^3}{3H^3_n}(N-1)\left(\dfrac{n^4-2n^3+n^2}{4}\right) \right\} \end{array} \right\} \quad (10)$$

ou réduisant en faisant :

$$\left. \begin{array}{l} (p+\gamma h) = A \\ \dfrac{2\gamma V^2_n}{3H^4_n} = B' \\ (V'_n+f'_n)\,\omega' = C' = (V'_n+f'_n)\,\omega'' h \end{array} \right\} \quad (11)$$

(ω'' étant le poids moyen des supports par mètre courant sur l horizontale, et par mètre de hauteur de ces supports, c'est-à-dire égal à $\frac{\omega'}{h}$) l'équation (10) deviendra :

$$V'_n = \frac{h}{Q'} \left\{ A\left(\frac{n^2-n}{2}\right) + \left(B'h^2 - C'\frac{h^3}{3H^3_n}(N-1)\right)\left(\frac{n^4-2n^3+n^2}{4}\right) + C'\frac{n^2-3n+2}{2} \right\}. \quad (12)$$

Cette équation renferme la valeur de la composante horizontale Q' qu'il faut déterminer par la condition qu'à la limite, quand $n = N$, l'on ait $V'_n = V'_N = V_N$; ce qui nous donne :

$$Q' = \frac{h}{V'_N} \left\{ A\frac{N^2-N}{2} + \left[B'h^2 - C'\frac{h^3}{3H^3_N}(N-1)\right]\left(\frac{N^4-2N^3+N^2}{4}\right) + C'\frac{N^2-3N+2}{2} \right\}. \quad (13)$$

Mais remarquons que A renferme h dans ses deux termes : car, en effet,

$$p = \pi h,$$

de sorte que

$$A = (\pi+\gamma)\,h.$$

L'équation (13) deviendra donc, en remplaçant les coefficients par leurs valeurs et en faisant passer h dans la parenthèse :

$$Q' = \frac{1}{V'_N} \left\{ \frac{(\pi+\gamma)H^2_N}{2} + \frac{1}{6}\gamma V'^2_N - (V'_N+f'_N)\,\omega''\frac{H^2_N}{12} + (V'_N+f'_N)\,\omega''\frac{H^2_N}{2} \right\}. \quad (14)$$

Si nous comparons les composantes horizontales dans les deux systèmes de ponts à chaînes en dessous et chaînes en dessus, toutes choses égales d'ailleurs, nous trouvons :

Digitized by Google

$$Q = \frac{1}{V'_n}\left\{\frac{(\pi+\gamma)H^2_n}{2} + \frac{1}{6}\gamma V^2_n + \frac{H^2_n}{12}(V'_n + f'_n)\omega''\right\}. \qquad (15)$$

Retranchant cette équation de la précédente, on a :

$$Q' - Q = \frac{1}{V'_n}\left(\frac{2}{3}(V'_n + f'_n)\omega''\right);$$

c'est-à-dire que la composante horizontale, dans le cas des chaînes en dessous, est plus grande que dans le cas des chaînes en dessus.

Cherchons maintenant l'angle de la tangente au point d'attache des câbles.

Nous avons, en général :

$$\text{tang}\,\alpha'_n = \frac{\Pi_n}{Q'} = \frac{P_n + \Gamma_n + \Theta_n}{Q'}; \qquad (17)$$

comme nous nous proposons de comparer les tangentes dans les deux systèmes, nous poserons pour la facilité des calculs :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{V'_n}\left\{\frac{(\pi+\gamma)}{2}H^2_n + \frac{1}{6}\gamma V'^2_n\right\} = D' \\ &(V'_n + f'_n)\omega'' H_n = E \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

et l'on aura :

$$\left.\begin{aligned} \Theta_n &= \frac{2}{3}E \\ Q' &= D' + \frac{5}{12}\frac{EH_n}{V'_n} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

La valeur de la tangente sera donc :

$$\text{tang}\,\alpha'_n = \frac{P_n + \Gamma_n + \frac{2}{3}E}{D' + \frac{5}{12}EH_n\frac{1}{V'_n}}. \qquad (20)$$

Telle est l'expression de la tangente au point extrême de la courbe pour un pont à chaînes en dessous.

La tangente analogue pour un pont à chaînes en dessus sera, en faisant un raisonnement semblable :

Digitized by Google

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{P_n + \Gamma_n + \frac{1}{3}E}{D' + \frac{1}{12}EH_n\frac{1}{V_n}}, \qquad (21)$$

D'après les formules (20) et (21), on voit que la comparaison des tangentes aux deux courbes est impossible sous cette forme. Pour l'effectuer, nous poserons :

$$\text{tang}\,\alpha'_n = \left\{(P_n + \Gamma_n) + \frac{2}{3}E\right\}\frac{1}{D'} \times \left\{1 + \frac{5}{12}\frac{EH_n}{D'V'_n}\right\}^{-1} \qquad (22)$$

$$\text{tang}\,\alpha_n = \left\{(P_n + \Gamma_n) + \frac{1}{3}E\right\}\frac{1}{D'} \times \left\{1 + \frac{1}{12}\frac{EH_n}{D'V'_n}\right\}^{-1} \qquad (23)$$

Si nous prenons la différence de ces deux tangentes après avoir effectué les développements indiqués ; développements qui nous donneront des séries rapidement convergentes, attendu que dans les cas ordinaires de la pratique le terme $\frac{EH_n}{D'V'_n}$ est une fraction très-faible ; nous aurons :

$$\text{tang}\,\alpha'_n - \text{tang}\,\alpha_n = \frac{V'_n(V'_n + f'_n)\omega''H_n}{(\pi+\gamma)H^2_n + \frac{\gamma V'^2_n}{6}} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{3}(P_n + \Gamma_n)H_n \left\{-1 + \frac{1}{2}\frac{(V'_n + f'_n)\omega''H^2_n}{(\pi+\gamma)H^2_n + \frac{\gamma V'^2}{6}}\right\} \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\frac{(V'_n + f'_n)\omega''H^2_n}{(\pi+\gamma)H^2_n + \frac{\gamma V'^2_n}{6}} \\ - \text{etc.} \end{array} \right\}. \qquad (24)$$

Or dans cette expression, le rapport $\frac{(V'_n + f'_n)\omega''H^2_n}{(\pi+\gamma)H_n^2 + \frac{\gamma V'^2_n}{6}}$ est toujours une assez faible fraction puisque le numérateur est sensiblement proportionnel au poids des supports, tandis que le dénominateur est proportionnel au poids de tout le reste de l'appareil, c'est-à-dire sensiblement proportionnel au poids des câbles, du plancher et de sa surcharge. Il est donc facile de voir que la différence ci-dessus est toujours négative ; c'est-à-dire que l'angle de la tangente des ponts à chaînes en dessous au point d'attache des câbles sera toujours, toutes choses égales d'ailleurs, plus faible que l'angle analogue dans les ponts à chaînes en dessus.

Quant à *la longueur de la chaîne* elle s'obtiendrait en introduisant dans la formule générale les poids des supports calculés comme nous venons de le faire.

Digitized by Google

Si la chaîne se composait de chaînons égaux, on suivrait, pour la détermination des éléments de ce nouveau polygone, une marche analogue à celle que nous avons suivie pour les ponts à chaînes en dessus, en remplaçant dans les formules les poids des tiges par ceux des supports des ponts à chaînes en dessous.

FIN DES NOTES.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE DES POLYGONES FUNICULAIRES CHARGÉS DE POIDS QUELCONQUES DISTRIBUÉS D'UNE MANIÈRE ARBITRAIRE SUR LEUR LONGUEUR.

CHAPITRE Ier.

Considérations générales.

Pages.

SECTION 1. — Mode d'action des matériaux dans les constructions. 1

SECTION 2. — Formes élémentaires des ponts. 3

SECTION 3. — Objet des ponts. Considérations auxquelles il faut avoir égard dans l'établissement d'un projet. 4

SECTION 4. — Classification des ponts, basée sur le mode d'action des matériaux qui les composent. 5

CHAPITRE II.

Détermination des éléments nécessaires à l'établissement des polygones d'équilibre statique.

SECTION 5. — Principes fondamentaux. 9

SECTION 6. — Relations entre les coordonnées des sommets d'un polygone et les poids et les tensions auxquelles ce polygone est soumis. 14

SECTION 7. — Détermination, à une très-grande échelle, de tous les éléments d'un polygone. 23

Digitized by Google

Pages.

NOTE N° 4. — Sur la transformation de l'expression (9) donnant la valeur des ordonnées d'un polygone, en une autre fondée sur la théorie des moments, et passage de cette première équation à l'équation différentielle des courbes en équilibre sous l'action de poids. 196

NOTE N° 5. — Sur les relations qui existent entre les polygones d'équilibre paraboliques et ceux qui résultent de l'intersection des lignes qui représentent les tensions en direction. 198

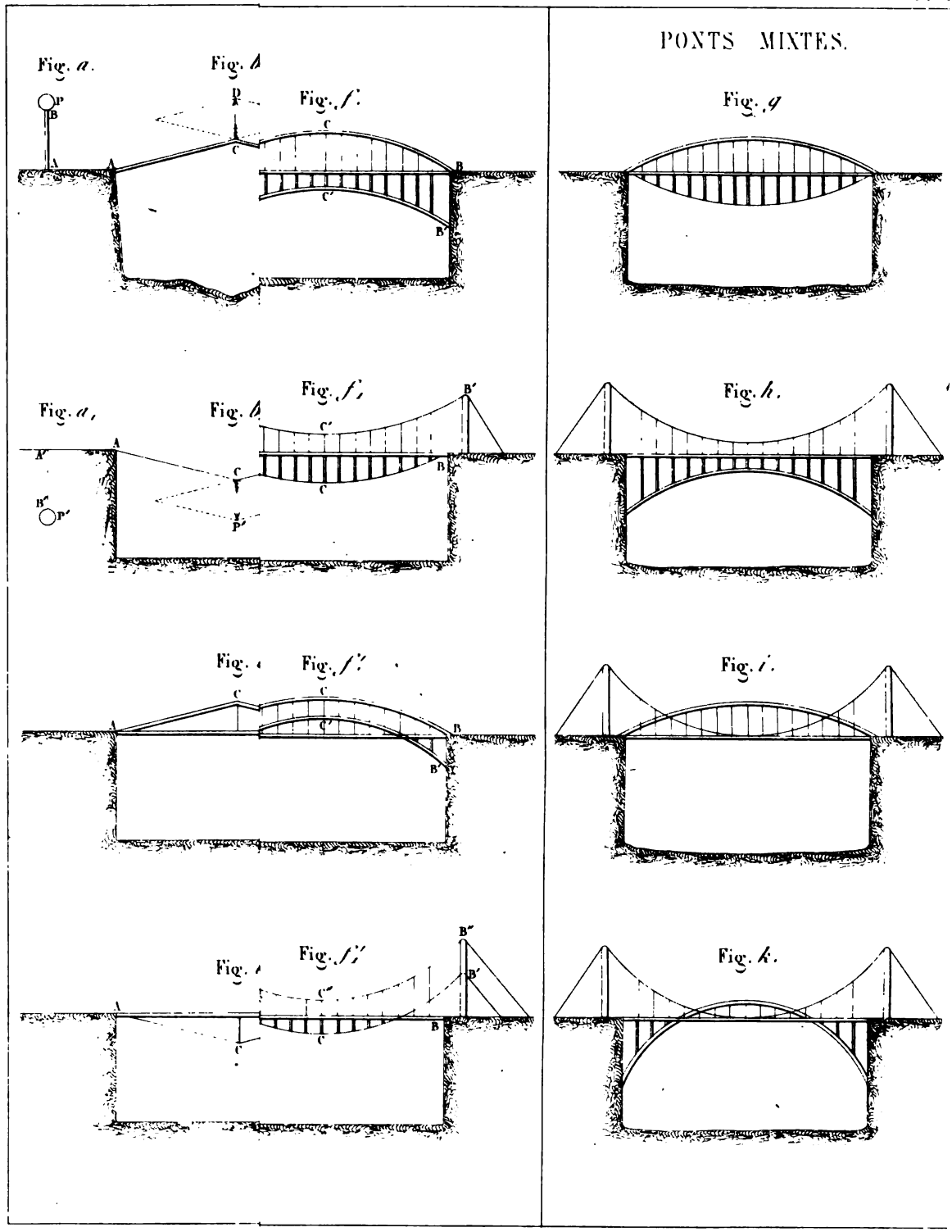
NOTE N° 6. — D'une expression plus exacte de l'ordonnée de la chaînette. 208

NOTE N° 7. — *Sur les ponts à chaînes en dessous*. 210

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Paris. — Imprimé par E. THUNOT et Cᵉ, rue Racine, 26.

Digitized by Google



Lemaitre sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1.

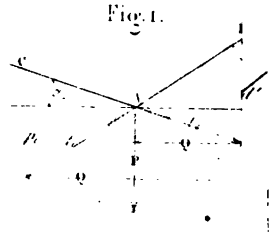


Fig. 5.

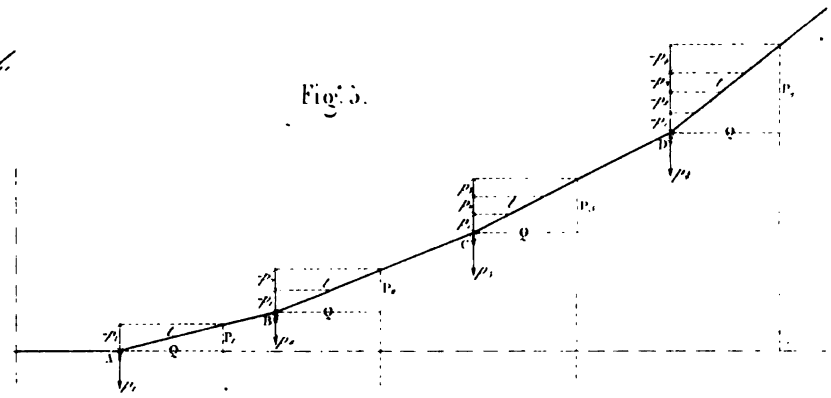


Fig. 6.

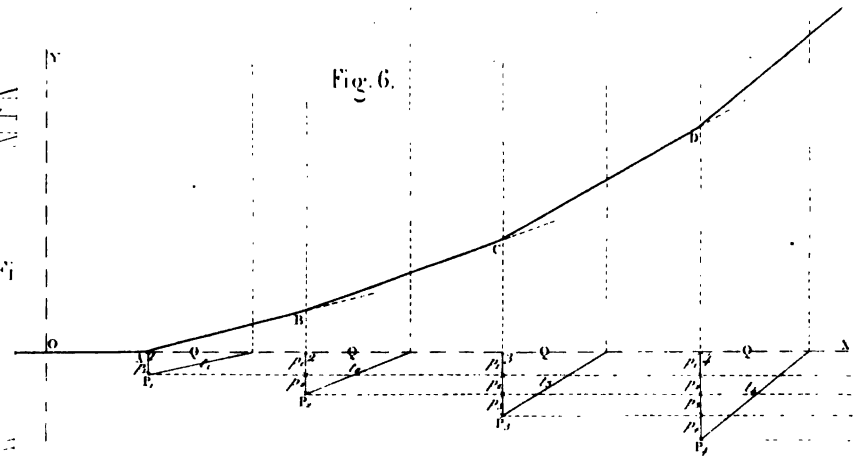


Fig. 14.

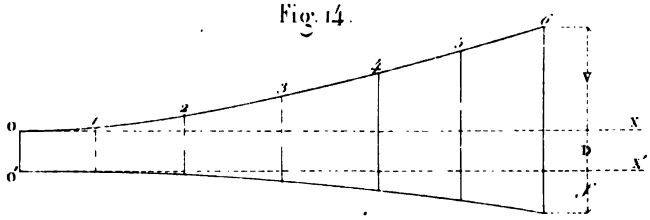


Fig. 11.

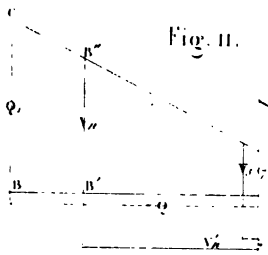


Fig. 16'.

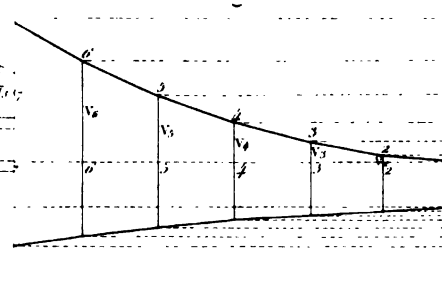
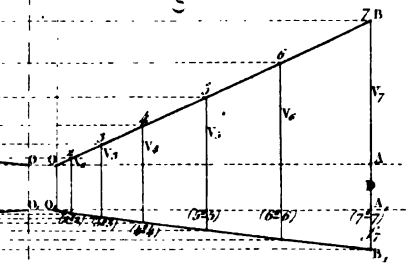


Fig. 16.



Lemaître sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 17.

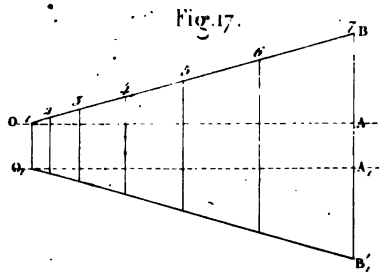


Fig. 21.

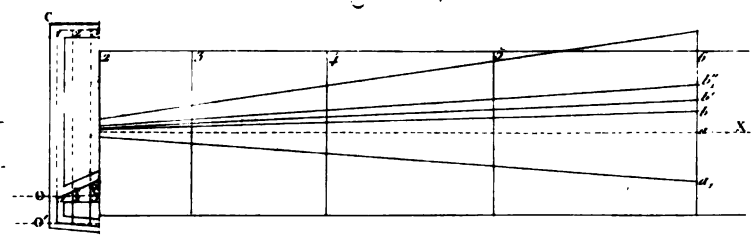


Fig. 26.

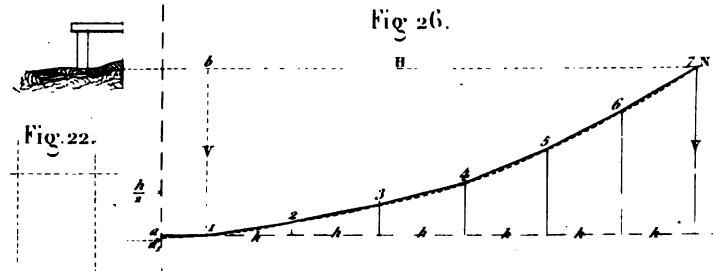


Fig. 22.

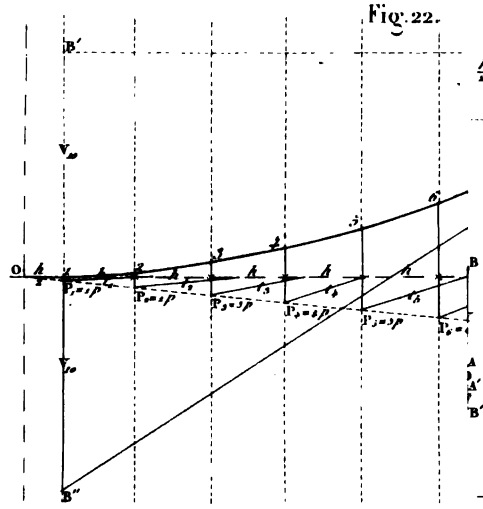


Fig. 27.

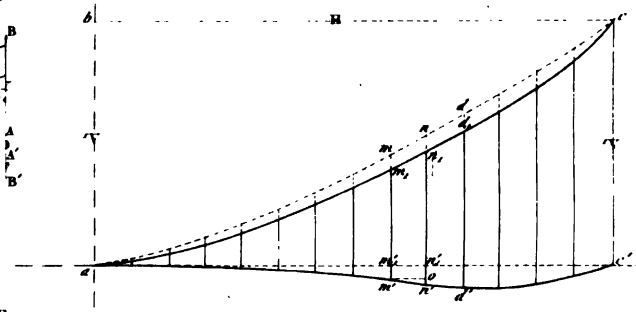


Fig. 28

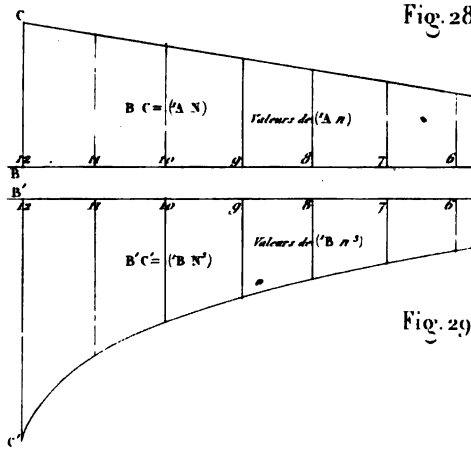


Fig. 51.

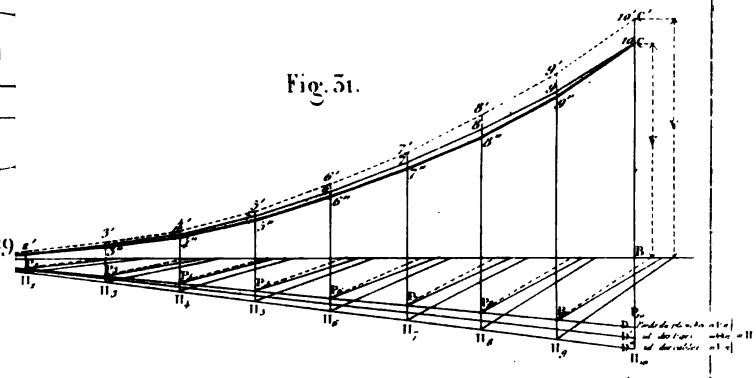
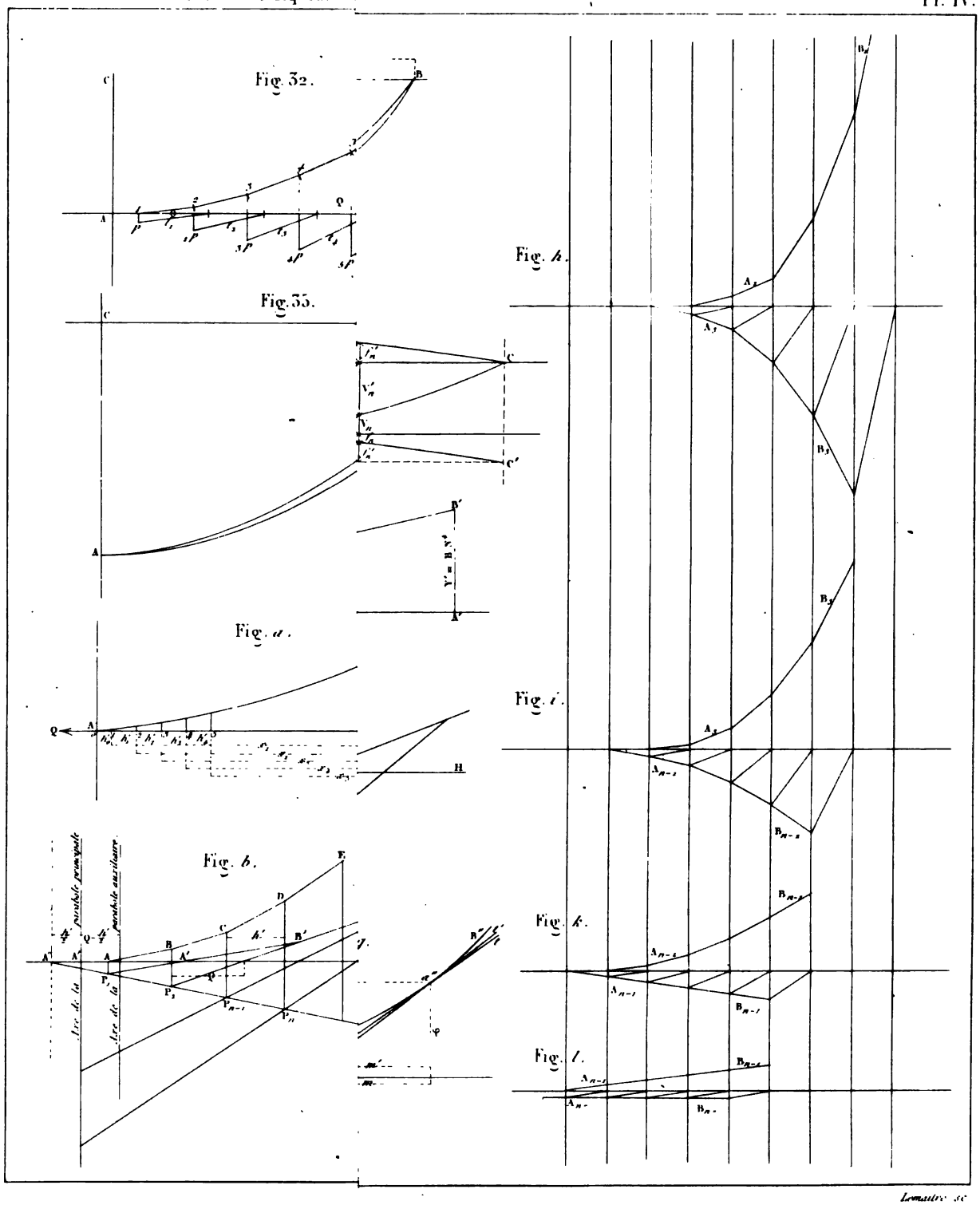


Fig. 29

Lemaître

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Eng 748.53
Considerations theoriques au poin
Cabot Science 004583091
3 2044 091 843 995

Digitized by Google